

Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском

«Финансовая эконометрика» — новый и крайне актуальный в прикладном плане раздел эконометрической науки, практически не представленный еще в русскоязычной специальной литературе. Поэтому мы рады представить в нашем журнале эту статью-консультацию, подготовленную известным в данной области исследований специалистом Дёаном Фантаццини¹. Предлагаемый материал послужит основой соответствующей главы учебника «Методы эконометрики», готовящегося к изданию в 2009 году авторами С. А. Айвазяном и Д. Фантаццини. В статье рассматриваются вопросы прикладного эконометрического анализа, связанного с задачами управления рисками, их видами, способами измерения; вводится ряд новых для русскоязычного читателя понятий и моделей.

Перевод с английского осуществлен под научной редакцией С. А. Айвазяна А. В. Кудровым.

1. Что такое управление рисками? Исторический обзор

За последние десятилетия объемы торговли на мировых финансовых рынках значительно выросли. В 1970 средний ежедневный объем торговли на Нью-йоркской фондовой бирже составлял 3,5 млн акций. В 2002 он уже составил 1,4 млрд акций. В последние годы мы наблюдаем существенное увеличение объемов торгов и на рынках производных ценных бумаг.

На финансовых рынках имеется огромное число игроков, которые занимают рискованные позиции, и для должной оценки своих позиций им необходимы количественные инструменты.

Джерри Корриган, бывший президент Федерального резервного банка Нью-Йорка, в ходе ежегодной встречи Ассоциации банкиров штата Нью-Йорк, имевшей место в январе 1992 года, сказал: «Вы все можете побиться об заклад, что нужно обратить очень серьезное внимание на забалансовую деятельность. Рост объемов и сложность [этой] деятельности и характер расчетного риска непогашения кредита, который они влекут за собой, должны стать для всех нас поводом для беспокойства.»... «Я надеюсь, что это звучит как предупреждение, потому что так оно и есть. Забалансовая деятельность очень нужна, но она должна тщательно управляться и контролироваться, и она должна быть понятна как высшему исполнительному руководству, так и трейдерам, и аналитикам». К сожалению, Джерри Корриган стал настоящей современной «Кассандрой».

¹ В настоящее время Д. Фантаццини (Dean Fantazzini, Ph.D., Италия) преподает эконометрику в Московской школе экономики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Недавняя история демонстрирует ряд примеров, когда большие потери на финансовом рынке происходят, главным образом, из-за отсутствия надлежащего управления рисками:

- **Округ Ориндж (1994).** 6 декабря 1994 года Округ Ориндж, преуспевающий район в Калифорнии, объявил о банкротстве после того, как понес потери приблизительно в 1,6 млрд долларов из-за ошибочной сделки с процентными ставками, совершенной одним из крупнейших инвестиционных фондов этого округа. Роберт Сайтрон, казначей округа Ориндж и управляющий фондом, размер которого составлял 7,5 млрд долларов, инвестировал средства в портфель (это были, в основном, процентные ценные бумаги), включавший в себя рискованные активы, приобретенные за счет заемных средств. Его стратегия зависела от краткосрочных процентных ставок, остававшихся на относительно низком уровне по сравнению со среднесрочными процентными ставками. Но с февраля 1994 года Федеральный резервный банк США начал повышать процентные ставки, что вызвало падение цен многих активов в инвестиционном пуле фонда округа Ориндж. В течение почти всего 1994 года Сайтрон игнорировал изменение процентных ставок и увеличивающиеся номинальные убытки в своем портфеле. Однако к концу 1994 года требования на миллиарды долларов по поручительствам от контрагентов Сайтрона с Уолл Стрит, а также угроза массового снятия денег с депозитов напуганными инвесторами местного правительства создали ловушку ликвидности, которую он не смог преодолеть.

- **Банк Barings (1995).** Банк Barings имел долгую историю успешной работы и был весьма уважаемым коммерческим банком, уже длительное время проработавшим в Великобритании. Но в феврале 1995 года этот высоконадежный банк с капиталом в 900 млн долларов потерпел банкротство из-за 1 млрд долларов торговых убытков по несанкционированным операциям. Как же такое могло произойти? Трейдер Ник Лисон должен был использовать возможности низко-рисковых арбитражных операций, которые усилили бы различия в ценах сходных производных ценных бумаг на Сингапурской валютной бирже (Simex) и бирже в Осаке. Фактически же он занимал намного более рискованные позиции, покупая и продавая контракты разного типа на различные суммы на двух этих биржах. Из-за халатности со стороны высшего руководства, Лисон получил контроль над функциями как торгового подразделения, так и бэк-офиса. Когда потери Лисона увеличивались, он повышал ставки. Однако, после того, как произошло землетрясение в Японии и индекс Nikkei резко снизился, его потери быстро выросли и составили более 1 млрд долларов. Это были слишком большие убытки для банка, с которыми он не сумел справиться; в марте 1995 года банк Barings был куплен голландским банком ING всего за один английский фунт стерлингов.

- **Банк Daiwa (1995).** Трейдер Тосихиде Игучи из банка Daiwa в Нью-Йорке подделывал подтверждения на продажу ценных бумаг, принадлежавших его клиентам. Соккрытие информации этим недобросовестным трейдером о потерях за более чем 11 лет послужило причиной убытков в 1,1 млрд долларов, что привело к банкротству банка в 1995 году.

- **Банк Sumimoto (1996).** Неучтенные убытки за 3 года, допущенные трейдером Ясуо Хаманакой, занимавшимся торговлей медью, привели к убыткам величиной более чем 2,6 млрд долларов к концу июня 1996 года.

- **LTCM (1998).** В 1994 году был основан хедж-фонд под названием Long-Term Capital Management, в нем собралась команда успешных трейдеров и ученых. Инвесторы и инвестиционные банки вложили около 1,3 млрд долларов в этот фонд, и спустя два года ежегод-

ная доходность на капитал составила почти 40%. В начале 1998 года номинальная стоимость активов достигла 4 млрд долларов, но в конце года фонд потерял существенную долю акционерного капитала и находился на грани дефолта. Федеральная Резервная Система США сумела предпринять пакет спасательных мер, расходуя 3,5 млрд долларов, чтобы избежать угрозы системного кризиса в мировой финансовой системе.

- **Allied Irish Bank («Элайд Айриш Бэнк», «Объединенный Банк Ирландии») (2002).**

Треjder Джон Раснак накопил убытки на спотовом и форвардном \$/Yen рынках, скрывая их путем регистрации поддельных опционов, возмещающих сумму его обязательств (он выписывал опционы, которые «глубоко в деньгах», не регистрируя их). К февралю 2002 потери составили более чем 750 млн долларов.

- **Национальный Банк Австралии (2004).** Четыре трейдера маскировали свои убытки с октября 2003 на позициях по австралийскому доллару на рынке Forex с помощью фиктивных сделок. Конечные убытки составили более чем 277 млн долларов.

- **Société Générale (банк «Сосьетэ Женераль») (2008).** 24 января 2008 года банк объявил, что один трейдер (Jerome Kerviel, Жером Кервель), торговавший фьючерсами, мошенническим путем нанес банку ущерб в размере 4,9 млрд евро (это эквивалентно 7,2 млрд долларов), что стало наибольшим убытком в истории жульничеств подобного типа. Руководители банка сообщали, что трейдер действовал в одиночку, и что он, возможно, не извлек прямую выгоду из своих мошеннических сделок. Помощник президента Франции Раймон Суби (Raymond Soubie) заявил, что Кервель имел отношение к сделкам по фьючерсам общей стоимостью 73,3 млрд долларов (что больше, чем рыночная капитализация банка, составлявшая 52,6 млрд долларов). Расследование, проводимое органами правопорядка, все еще продолжается, и детали пока неизвестны, но предполагаемые масштабы мошенничества намного больше, чем сделки Ника Лисона, который разорил Банк Barings.

1.1. Регулирующий капитал

Чтобы быть в состоянии покрыть большую часть финансовых убытков, многие банки и финансовые учреждения откладывают резервный капитал, также называемый регулирующим капиталом. Величина необходимого резервного капитала, конечно, связана с величиной риска, взятой на себя банком или финансовым учреждением, т. е. с распределением доходов и убытков. Эта величина регламентируется законом, а национальные надзорные органы следят за тем, чтобы банки и финансовые учреждения следовали этим правилам. Одновременно с этим прилагаются усилия по разработке международных стандартов и методик для расчета регулирующего капитала. Это основная задача так называемого *Базельского Комитета по Банковскому надзору (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS))*. Базельский Комитет, основанный в 1974 году, не обладает формальными наднациональными надзорными полномочиями, и его заключения не имеет юридической силы.

BCBS состоит из председателей национальных банков стран G-10 плюс Люксембург, Швейцария и является подкомитетом содействия при Банке международных расчетов (Bank for International Settlements (BIS)). Он формулирует (юридически ни к чему не обязывающие) стандарты банковского надзора для:

- содействия безопасности и прочности глобальной финансовой системы;
- создания равных условий для всех международных финансовых организаций;

- установки минимальных резервов для основных финансовых институтов;
- расчета минимального достаточного капитала для банков, действующих на международном уровне.

BCBS формулирует стандарты, основополагающие принципы надзора и дает рекомендации, основанные на передовом опыте, по осуществлению деятельности в банках и других финансовых организациях. Таким образом, Базельский Комитет имеет сильное влияние на национальные надзорные органы. Кратко об истории Базельских соглашений.

- **Базель I (1988).** Первое Базельское соглашение по банковскому надзору стало важным шагом к созданию международных стандартов по расчету достаточности капитала. Основное внимание в соглашении сосредоточено на определении структуры капитальной базы на основе уровня риска для активов с кредитным риском.

- **Поправка к 1-му Базельскому соглашению (1996)** предписывает так называемую стандартизированную модель для рыночного риска с возможностью выбора для больших банков использовать внутренние модели, так называемых, «границ потерь уровня α »². Кроме того, предписываемая модель учитывала риски по Forex и риски торговых портфелей.

- **Базель II (2001 и после).** В 2001 году были начаты консультации по новому Базельскому соглашению, основными темами которых было обсуждение передового опыта описания кредитного риска, а также обсуждение подходов расчета достаточности капитала для операционного риска. Последние изменения в документации были сделаны в ноябре 2007 года. Регуляторы большинства юрисдикций мира планируют разработать и внедрить новое соглашение, где будет учтена разница в часовых поясах, и которое составят более формальные методологии. Европейский Союз уже внедрил подобное соглашение, оно называется Директивой ЕС достаточности капитала. Многие европейские банки сообщают о своих коэффициентах достаточности капитала согласно новой директиве. Планируется, что к 2008 году все кредитные учреждения будут работать в соответствии с вышеупомянутой директивой.

1.2. Типы рисков

Риск для организации, в общих словах, можно определить как любое событие или действие, которое может неблагоприятно повлиять на эту организацию в достижении обязательств и следовании ее стратегии. В финансовом риск-менеджменте мы можем разделить большинство рисков на пять категорий.

- **Рыночный риск.** Рыночный риск — это риск того, что изменения цен и ставок (курсы акций, обменные курсы, процентные ставки, цены на сырьевые товары) на финансовом рынке ослабят позиции банка. Рыночный риск капитала часто измеряется относительно эталонного индекса или портфеля ценных бумаг. В этом случае его называют «риском относительно отслеживания ошибки».

- **Кредитный риск.** Кредитный риск — это риск того, что надежность контрагента отразится на положении банка (кредитный риск контрагента). Способность контрагента отвечать

² В англоязычной версии этот показатель называется «Value at Risk» (VaR).

по долговым обязательствам определяет надежность контрагента, которая описывается вероятностью невыполнения обязательств и ожидаемой нормой восстановления. Невыполнение обязательств происходит тогда, когда контрагент не желает или неспособен выполнить свои обязательства по контракту. Это экстремальная ситуация.

Кредитный риск возникает только тогда, когда обязательства контрагента являются активом, т. е. они имеют положительную восстановительную стоимость. Если контрагент отказывается выполнять обязательства, убыток может составить общую рыночную стоимость этих обязательств или некоторый процент от этой величины (называемый убытком из-за невыполнения обязательств). Процент от общей рыночной стоимости, который должен быть возмещен, называется нормой восстановления.

• **Риск потери ликвидности.** Мы различаем два связанных друг с другом типа риска потери ликвидности: риск финансовой ликвидности и риск торговой ликвидности. Риск финансовой ликвидности связан со способностью финансовых организаций находить необходимые средства в достаточном объеме для рефинансирования долгов, удовлетворения потребности в наличных средствах, в марже, дополнительных требований контрагентов, а также для осуществления выплаты при изъятии капитала. Другими словами, риск потери ликвидности — это риск недостаточности наличных средств для поддержания нормальной хозяйственной деятельности.

Риск торговой ликвидности — риск того, что организация не сможет осуществлять торговые операции на рынке с преобладающей рыночной ценой, поскольку отсутствует интерес к заключению сделок с этой организацией со стороны участников рынка (неликвидный рынок).

• **Операционный риск** — риск потерь в результате неадекватной работы, ошибочных внутренних процессов, действий персонала и систем, или внешнего воздействия. В него входят человеческие риски такие, как: некомпетентность и мошенничество; процессные риски, в том числе: риск контроля сделок и риск операционного контроля; а также технологический риск сбоя систем, ошибок программирования и т. д. Операционный риск может повлечь за собой рыночный и кредитный риски.

• **Юридический риск.** Юридический риск — это риск, являющийся результатом неопределенности из-за судебных исков или неопределенности, связанной с применимостью или трактовкой контрактов, законов и инструкций. Источники юридического риска включают в себя: проблемы кредитоспособности и обеспечения исполнения, так же как проблемы законности финансовых инструментов и их подверженность непредвиденным изменениям законов и инструкций. Юридический риск связан с кредитным риском, поскольку контрагенты могут найти юридические основания для того, чтобы лишить сделку законной силы.

Как видно из приведенных определений, описанные категории риска не вписываются в четкие, отделенные друг от друга классы. Операционный риск может создать рыночный и кредитный риск, и наоборот. Вот почему важно рассматривать финансовые риски с точки зрения компании в целом. Управление совокупным риском обеспечивает общую и последовательную картину риска в деятельности компании. Для этого требуется измерять риск во всех подразделениях компании и по всем факторам риска, с использованием согласованных методик, систем и данных. Учитывая значимость всего этого для финансовых учреждений, сосредоточим внимание на управлении рыночным, кредитным и операционным рисками. Для

получения более подробной информации о рисках ликвидности, юридических рисках, а также управлении совокупным риском, можно обратиться к работе [Jorion (2007)].

2. Управление рыночным риском

2.1. Меры риска: определения и свойства

Мера риска необходима:

- для определения *рискового капитала*, т. е. определения капитала, необходимого финансовому учреждению для покрытия неожиданных убытков.
- как *инструмент управления* — это означает, что мера риска используется менеджментом для того, чтобы оценивать и контролировать уровень риска, взятый тем или иным подразделением компании.

Задача определения подходящей меры риска Ψ всегда была особенно важной как с теоретической точки зрения, так и с практической. Существуют подходы к ее определению, предложенные в статье [Artzner, Delbaen, Eber и Heath (1999)] (далее мы будем ссылаться на эту работу, используя сокращение [ADEH(1999)]), которые в настоящее время приняты ученым сообществом, но еще не всеми специалистами в области финансов.

Для простоты и финансовой целесообразности, будем иметь дело с изменением цены некоторого финансового актива за один шаг $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ (мы предпочитаем использовать ΔP_t , а не P_t , поскольку понятие риска Ψ интуитивно ассоциируется с доходами и убытками). Мы могли бы использовать нетто-доходности (определяемые как $\Delta P_t / P_{t-1}$), но обычно удобнее использовать меру риска, которая измеряет убытки в денежных единицах. Впрочем, также рассмотрим примеры с использованием нетто-доходностей и лог-доходностей.

Сформулируем и обсудим свойства, которыми должны обладать меры риска Ψ как функции от ΔP_t .

Определим $\Psi(\Delta P_t)$ как меру риска ΔP_t . В статье ADEH утверждается, что величина $\Psi(\Delta P_t)$ должна обладать следующими свойствами:

- **Трансляционная инвариантность.** Пусть даны случайная величина ΔP_t , безрисковая процентная ставка r и некоторая константа $\theta_r \in R$, тогда

$$\Psi(\Delta P_t + \theta_r, r) = \Psi(\Delta P_t) - \theta_r. \quad (1)$$

- **Субаддитивность.** Пусть даны изменения цен (или доходностей) двух финансовых активов $\Delta P_{t,1}$, $\Delta P_{t,2}$, тогда имеет место неравенство

$$\Psi(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) \leq \Psi(\Delta P_{t,1}) + \Psi(\Delta P_{t,2}). \quad (2)$$

- **Положительная однородность.** Пусть дана случайная величина ΔP_t и неотрицательная константа λ , тогда

$$\Psi(\lambda \Delta P_t) = \lambda \Psi(\Delta P_t). \quad (3)$$

- **Монотонность.** Пусть даны изменения цен (или доходностей) двух финансовых активов $\Delta P_{t,1}$, $\Delta P_{t,2}$ такие, что $\Delta P_{t,1} \leq \Delta P_{t,2}$, тогда

$$\Psi(\Delta P_{t,2}) \leq \Psi(\Delta P_{t,1}). \quad (4)$$

Первое свойство говорит о том, что если мы прибавим детерминированную компоненту (безрисковый актив) к случайной величине, то мера риска уменьшится на величину, инвестируемую в безрисковый актив.

Второе свойство требует, чтобы мера риска портфеля, состоящего из двух активов, $\Psi(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2})$ была не больше, чем сумма мер риска каждого из составляющих портфель активов. Субаддитивность гарантирует, что объединение позиций уменьшит общий риск.

Третье свойство говорит о том, что если увеличивается сумма, инвестированная в актив P_t , то мера риска также должна увеличиться. В особенности, эта гипотеза требует, чтобы риск увеличивался пропорционально увеличению инвестируемой суммы.

Отметим, что, если выполнены свойства трансляционной инвариантности и положительной однородности, то для любого действительного θ_r имеем:

$$\Psi(-\theta_r, r) = \theta_r.$$

Кроме того, если воспользоваться свойством положительной однородности, взяв $\lambda = 2$, то получим следующее равенство:

$$\Psi(\Delta P_t + \Delta P_t) = \Psi(\Delta P_t) + \Psi(\Delta P_t),$$

которое показывает, что инвестирование равной суммы в другой актив, полностью коррелированный с первым, он удваивает риск портфеля. Из последнего равенства следует, что в данном случае свойство субаддитивности выполнено со знаком равенства.

Наконец, последнее свойство выражается в том, что если актив A дает всегда более высокий доход, чем актив B , то мера риска должна показать нам, что инвестирование средств в актив A выгоднее, чем в B . Другими словами, убытки, которым мы можем подвергнуться, инвестируя средства в актив A , должны быть меньше, чем убытки, которым мы можем подвергнуться, инвестируя средства в B . Конечно, если A всегда выгоднее, чем B , то мы имеем арбитраж, и хорошая мера риска должна указать на это.

Мера, которая удовлетворяет всем четырем свойствам, перечисленным выше, называется *согласованной мерой риска* (a coherent risk measure). Любую меру, для которой не выполняется хотя бы одно из этих свойств, нельзя рассматривать как согласованную меру риска.

2.1.1. Ни дисперсия, ни стандартное отклонение не являются согласованными мерами риска

Теперь мы хотим выяснить, является ли дисперсия $\Psi(\Delta P_t) = \text{Var}(\Delta P_t)$, а также стандартное отклонение $\Psi(\Delta P_t) = \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t)}$, согласованными мерами риска. Для этого мы должны проверить, удовлетворяют ли эти функции свойствам (1)–(4).

- **Трансляционная инвариантность.** Следует вычислить

$$\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r, r) \text{ и } \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r, r)}.$$

Поскольку величина θ_r, r детерминированна, немедленно получаем, что справедливы равенства:

$$\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r, r) = \text{Var}(\Delta P_t) \text{ и } \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t + \theta_r, r)} = \sqrt{\text{Var}(\Delta P_t)},$$

из которых следует, что свойство трансляционной инвариантности (1) для дисперсии и стандартного отклонения не выполняется. Хотя на этом мы могли бы завершить наш анализ, но, ради интереса, мы проверим оставшиеся три свойства.

• **Субаддитивность.** Дисперсия суммы изменений цен (или доходностей) двух активов может быть представлена как

$$Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) = Var(\Delta P_{t,1}) + Var(\Delta P_{t,2}) + 2Cov(\Delta P_{t,1}, \Delta P_{t,2}),$$

а ковариация равна

$$Cov(\Delta P_{t,1}, \Delta P_{t,2}) = \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})} \cdot \rho,$$

где ρ — коэффициент корреляции. Так как коэффициент корреляции по модулю меньше или равен единице, то верно неравенство

$$Cov(\Delta P_{t,1}, \Delta P_{t,2}) \leq \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})},$$

воспользовавшись которым, получаем

$$\begin{aligned} Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) &\leq Var(\Delta P_{t,1}) + Var(\Delta P_{t,2}) + 2\sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} \cdot \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) \leq (\sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} + \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})})^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{Var(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2})} \leq \sqrt{Var(\Delta P_{t,1})} + \sqrt{Var(\Delta P_{t,2})}.$$

Таким образом, стандартное отклонение — это субаддитивная функция.

Дисперсия, тем не менее, не является субаддитивной функцией, так как для нее свойство субаддитивности выполняется тогда и только тогда, когда $\rho \leq 0$, что неверно в общем случае.

• **Положительная однородность.** Доказательство того, что стандартное отклонение удовлетворяет этому свойству, тривиально:

$$\sqrt{Var(\lambda \Delta P_t)} = \sqrt{\lambda^2 Var(\Delta P_t)} = \lambda \sqrt{Var(\Delta P_t)}.$$

Следовательно, стандартное отклонение обладает свойством положительной однородности.

Однако для дисперсии это свойство не выполняется. Докажем это, предположив противное: пусть даны ΔP_t и неотрицательная константа λ , тогда в соответствии со свойством (3)

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda Var(\Delta P_t).$$

В силу свойств дисперсии,

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda^2 Var(\Delta P_t),$$

поэтому

$$Var(\lambda \Delta P_t) = \lambda Var(\Delta P_t) = \lambda^2 Var(\Delta P_t).$$

Откуда следует, что, с учетом $Var(\Delta P_t) > 0$, величина λ должна удовлетворять квадратному уравнению

$$\lambda = \lambda^2,$$

решениями которого являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Но это противоречит предположению о том, что λ может быть любым неотрицательным числом. Таким образом, видно, что дисперсия не обладает свойством положительной однородности.

• **Монотонность.** Рассмотрим случайный доход ΔP_t и строго положительную константу ε . Определим случайную величину ΔP_j следующим образом:

$$\Delta P_j = \Delta P_t + \varepsilon.$$

Заметим, что всегда $\Delta P_j > \Delta P_t$. Если дисперсия удовлетворяет свойству монотонности, то дисперсия случайной величины ΔP_j должна быть больше, чем дисперсия случайной величины ΔP_t . Вместо этого имеем:

$$\text{Var}(\Delta P_j) = \text{Var}(\Delta P_t + \varepsilon) = \text{Var}(\Delta P_t),$$

а значит свойство монотонности в этом случае не выполняется.

Можно рассмотреть более общий случай, когда ε является случайной величиной, принимающей только положительные значения. В этом случае, поскольку справедливо следующее равенство:

$$\text{Var}(\Delta P_j) = \text{Var}(\Delta P_t + \varepsilon) = \text{Var}(\Delta P_t) + \text{Var}(\varepsilon) + 2\text{Cov}(\Delta P_t, \varepsilon),$$

величина $\text{Var}(\Delta P_j)$ меньше, чем $\text{Var}(\Delta P_t)$, тогда и только тогда, когда

$$\text{Var}(\varepsilon) + 2\text{Cov}(\Delta P_t, \varepsilon) < 0 \Rightarrow \text{Cov}(\Delta P_t, \varepsilon) < -\frac{1}{2}\text{Var}(\varepsilon).$$

Однако, так как свойство монотонности должно выполняться для произвольных положительных случайных величин ε , заключаем, что дисперсия не удовлетворяет этому свойству. А значит, и стандартное отклонение также не обладает свойством монотонности.

Если дисперсия (и стандартное отклонение) не является согласованной мерой риска, то чем она (оно) является? Ответ прост: это, в соответствии с определением, мера случайного рассеяния относительно среднего. Желание того, чтобы наши доходы от портфельных инвестиций были несильно рассеяны вокруг среднего, оправданно, однако мы не можем утверждать, что инвестор, минимизирующий дисперсию (или стандартное отклонение), в то же самое время минимизирует и риск!

2.1.2. Теорема о представлении

Так как дисперсия не является согласованной мерой риска, мы можем задаться вопросом: имеют ли согласованные меры некоторую специфическую форму? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (см.[ADEH (1999)]).

Теорема 1. Мера $\Psi(\Delta P_t)$ является согласованной мерой риска тогда и только тогда, когда существует семейство вероятностных законов \mathbf{P} таких, что³

$$\Psi(\Delta P_t) = -\inf \left\{ E^{\mathbf{P}} \left[\frac{\Delta P_t}{1+r} \right] \mid \mathbf{P} \in \mathbf{P} \right\}. \quad (5)$$

³ Под $E^{\mathbf{P}} \xi$ понимается среднее значение случайной величины ξ , подчиняющейся закону распределения вероятностей \mathbf{P} .

Доказательство этой теоремы читатель найдет в [ADEH (1999)].

Отметим некоторые важные аспекты:

- во-первых, усредняется прибыль (или убыток) рискованного актива, поделенная на безрисковую процентную ставку;
- во-вторых, возможность выбирать вероятностный закон из семейства \mathbf{P} позволяет создавать бесконечно много согласованных мер риска. Этот результат имеет как положительный аспект, так как можно выбирать наиболее подходящую меру риска, так и отрицательный, поскольку выбор меры риска становится субъективным выбором риск-менеджера;
- в третьих, результат теоремы получен для случая одного периода. В работе [Riedel (2004)] он обобщен на многопериодный случай с учетом всех возможных потоков наличности $\delta(s)$, которые могут возникнуть между моментами времени t и T . Рассматривая капитализацию в дискретном времени, автор получает следующий, более общий, результат:

$$\Psi_t(\delta) = -\inf \left\{ E^P \left[\sum_{s=t}^T (1+r)^{t-s} \delta(s) \right] \middle| P \in \mathbf{P} \right\}, \quad (6)$$

т. е. вычисляем ожидаемое значение всех потоков наличности, дисконтированных в соответствии с безрисковой ставкой процента r .

Отметим очень простое, но весьма любопытное следствие предыдущей теоремы.

Теорема 2. Любая выпуклая линейная комбинация согласованных мер риска — снова согласованная мера риска.

Пусть мы имеем n мер риска $\Psi_j(\Delta P_t)$ (где $j \in 1, 2, \dots, n$), возьмем n положительных констант c_j , сумма которых равна единице. Тогда результирующая мера

$$\hat{\Psi}(\Delta P_t) = \sum_{j=1}^n c_j \Psi_j(\Delta P_t)$$

будет согласованной мерой риска.

2.1.3. «Средние ожидаемые потери уровня α » (СОП $_{\alpha}$) как согласованная мера риска⁴

Вводимая в данном разделе характеристика — «средние ожидаемые потери уровня α » (СОП $_{\alpha}$) — измеряет среднее значение потерь доли α худших результатов, которые можно получить от инвестиций. Очевидно, при $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ эта величина должна принимать отрицательные значения. Однако при определении и интерпретации меры риска как монотонно неубывающей функции потерь удобнее оперировать с потерями как с положительными величинами. Читатель должен принять во внимание это замечание при усвоении последующего материала. Перед тем как будет приведено формальное определение СОП $_{\alpha}$, рассмотрим следующие характеристики.

Предположим, что случайная величина $\Delta \hat{P}_t = \Delta P_t / (1+r)$ имеет функцию плотности $f(\Delta \hat{P}_t)$, непрерывную на всей действительной оси. Для простоты и без ограничения общности рас-

⁴ В англоязычной литературе этот показатель называется «The Expected Shortfall» и обозначается через ES_{α} .

смотрим случай, когда $r = 0$, так что $\Delta \hat{P}_t = \Delta P_t$. Тогда кумулятивная функция распределения случайной величины ΔP_t имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Заметим, что, в силу существования плотности $f(\Delta \hat{P}_t)$, функция распределения $F(\Delta P_t)$ непрерывна.

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = \alpha,$$

где α — константа, принадлежащая интервалу $(0, 1)$. В силу непрерывности функции F , для любого $\alpha \in (0, 1)$ будет существовать хотя бы одно решение этого уравнения.

Если функция F строго возрастает, то она обратима (причем обратная функция будет также непрерывной), а значит решение уравнения единственно и дается формулой

$$\gamma = -F^{-1}(\alpha).$$

Если же функция F не является строго возрастающей, мы можем воспользоваться понятием обобщенного обращения (или обобщенного квантиля), в соответствии с которым

$$F^{-1}(\alpha) = \sup\{x | F(x) \leq \alpha\},$$

так что величина

$$\gamma = -\sup\{x | F(x) \leq \alpha\}$$

будет решением уравнения.

На рис. 1 изображен пример функции плотности, а также кумулятивная функция распределения, построенная по этой плотности, и функция, обратная к кумулятивной функции распределения.

Теперь можно определить величину СОП_α для $\alpha \in (0, 1]$.

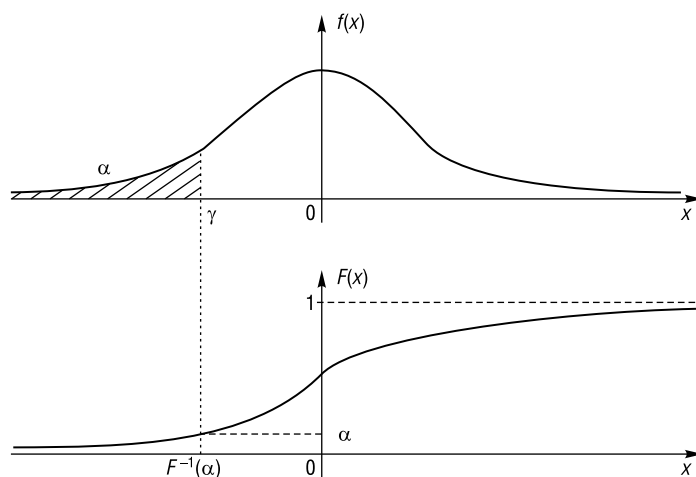


Рис. 1. Функция плотности, кумулятивная функция распределения и обратная функция

Определение 1. Средние ожидаемые потери уровня α для случайной величины ΔP_t с функцией распределения F (обозн. $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t)$) — это среднее значение доли α худших потерь, взятое со знаком минус:

$$\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz. \quad (7)$$

Для $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ выполнены свойства трансляционной инвариантности, положительной однородности и монотонности, что легко следует из свойств квантилей, выполняется и свойство субаддитивности, однако его доказательство значительно более сложно (см. [Acerbi, Tasche (2002)]). Таким образом, $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ — согласованная мера риска!

Если в выражении (7) устремить α к нулю, то, используя правило Лопиталя, мы получим:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha} = -\lim_{\alpha \rightarrow 0} F^{-1}(\alpha) = -F^{-1}(0) \equiv \text{СОП}_0(\Delta P_t),$$

т. е. $\text{СОП}_0(\Delta P_t)$ — наибольший убыток, который можно получить для случайной величины ΔP_t . Если функция плотности f непрерывна и положительна на всей отрицательной действительной полуоси, как это представлено на рис. (1), то $\text{СОП}_0(\cdot) = +\infty$. Отметим еще один важный факт, касающийся $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t)$:

$$\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\int_0^1 F^{-1}(z) dz = -E[\Delta P_t].$$

Последнее равенство легко получить, воспользовавшись заменой переменных

$$y = F^{-1}(z) \Rightarrow F(y) = z \Rightarrow f(y) dy = dz,$$

в интеграле

$$\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(1)} y f(y) dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy \equiv -E[\Delta P_t].$$

В случае, когда $\alpha \in (0, 1)$, воспользовавшись этой заменой, приходим к

$$\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(z) dz = -\frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(\alpha)} y f(y) dy = -\frac{1}{F(\gamma)} \int_{-\infty}^{\gamma} y f(y) dy.$$

Таким образом, мы определили меру риска $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$.

Пример 1. $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t)$ для случайной величины ΔP_t , равномерно распределенной на интервале (a, b) .

Функция плотности случайной величины ΔP_t , распределенной равномерно на интервале (a, b) , как известно, задается соотношением:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & y \in (a, b), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Соответствующая ей кумулятивная функция распределения равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \begin{cases} 1, & x \geq b, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и обратная функция для функции F равна

$$F^{-1}(\alpha) = a + \alpha(b - a),$$

где $\alpha \in [0, 1]$. Тогда для $\alpha \in (0, 1]$

$$\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(x)dx = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (a + x(b - a))dx = -a - \frac{1}{2}\alpha(b - a).$$

Если $\alpha = 0$, то $\text{СОП}_\alpha(\Delta P_t) = -a$ ($\text{СОП}_0(\Delta P_t)$ положительны, если a отрицательно). Кроме того $\text{СОП}_1(\Delta P_t) = -\frac{a+b}{2}$, т. е. $\text{СОП}_1(\Delta P_t)$ равно среднему значению ΔP_t , взятому с обратным знаком.

2.1.4. Спектральные меры риска

В предыдущем разделе $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ было определено как среднее значение потерь доли α худших результатов, которые мы можем получить от инвестиций. Однако вместо того, чтобы вычислять среднее значение, рассмотрим взвешенное среднее значение, тем самым обобщая $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$.

Обозначив весовую функцию через $\varphi(z)$ (которая определена на отрезке $[0, 1]$), введем понятие спектральной меры.

Определение 2. Мера риска $M_\varphi(\Delta P_t)$ называется спектральной, если

$$M_\varphi(\Delta P_t) = -\int_0^1 \varphi(z) F_{\Delta P_t}^{-1} dz, \quad (8)$$

где $F_{\Delta P_t}^{-1}(z)$, как и прежде, — функция, обратная к функции распределения случайной величины ΔP_t .

Величину $\varphi(z)$ еще называют спектром риска или функцией неприятия риска, («the risk-aversion function»).

Легко видеть, что $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ при $\alpha \in (0, 1]$ — спектральная мера риска, спектр риска которой $\varphi(z)$ — разрывная функция, принимающая значение 0 для прибылей или небольших убытков и постоянное неотрицательное значение для больших убытков. Если более формально, то для спектра риска меры $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ мы определяем $\varphi(z)$ с помощью индикаторной функции:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{1}_{z < \alpha}, \quad (9)$$

где $\mathbf{1}_{z < \alpha} = \begin{cases} 1, & z < \alpha, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Возникает вопрос: всегда ли спектральная мера является согласованной мерой риска? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема (см. [Acerbi (2002)]):

Теорема 3. *Спектральная мера согласованна тогда и только тогда, когда*

- $\varphi(z)$ неотрицательна;
- $\varphi(z)$ невозрастающая;
- $\int_0^1 \varphi(z) dz = 1$.

Следовательно, если мы хотим доказать, что $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ для $\alpha \in (0, 1]$ является согласованной мерой риска, то нам необходимо проверить три условия из теоремы 3. Вместо того, чтобы проверять эти условия алгебраически, дадим более наглядный ответ, используя графическое представление спектра $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$, приведенное на рис. 2.

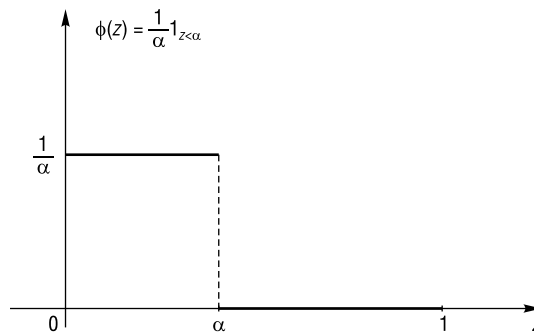


Рис. 2. Графическое представление спектра $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$

Можно заметить, что спектр $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$ нигде не принимает отрицательных значений, нигде не возрастает, и его интеграл по отрезку $[0, 1]$, графически определяемый как площадь под графиком, равен 1.

Отметим, что первые два условия теоремы 3 отражают несклонность к риску. В соответствии с этими условиями весовые коэффициенты, отвечающие большим убыткам, должны быть не меньше, чем весовые коэффициенты, отвечающие меньшим убыткам.

Из рис. 2 видно, что инвестор, использующий $\text{СОП}_\alpha(\cdot)$, приписывает одинаковые веса всем убыткам, большим, чем определенный порог, в то время как меньшим потерям и прибылям он приписывает нулевые веса. Однако эта мера не является «идеальной» спектральной мерой, потому что она несовместима с теорией неприятия риска. Если мы имеем «идеальную» функцию неприятия риска, то веса, соответствующие этой функции, должны убывать гладко, и скорость этого убывания связана со степенью неприятия риска следующим образом: чем больше инвестор не расположен к риску, тем быстрее будут убывать веса с ростом аргумента z .

Таким образом, чтобы получить спектральную меру риска, инвестор должен выбрать подходящую для себя функцию неприятия риска. Этот выбор субъективен, но в нем можно руководствоваться исследованиями по теории функций полезности. Обращаем Ваше внимание на статью [Acerbi (2004)] и на ссылки, имеющиеся в ней, для более подробной информации о теории полезности.

2.1.5. Граница потерь уровня α (ГП_α)⁵

ГП_α определяется следующим образом:

⁵ В англоязычной литературе этот показатель называется «The Value at Risk» и обозначается VaR_α .

Определение 3. Граница потерь уровня α (обозн. $\Gamma\text{П}_\alpha$) — это минимальные потери в доле α всех худших результатов.

Пусть ΔP_i — случайная величина, описывающая доходы/убытки, с функцией распределения F . При заданном уровне α и при условии, что F — строго возрастающая и обратимая функция, $\Gamma\text{П}_\alpha$ — это величина потери γ , равная

$$\gamma = -F^{-1}(\alpha).$$

Другими словами, $\Gamma\text{П}_\alpha$ — это квантиль функции распределения убытков/доходов, взятый со знаком минус (объяснение появления знака «минус» в этом определении см. в начале пункта 2.1.3). Если функция F не является обратимой, то мы воспользуемся понятием обобщенного обращения (или обобщенного квантиля):

$$F^{-1}(\alpha) = \sup\{x | F(x) \leq \alpha\},$$

таким образом,

$$\gamma = -\sup\{x | F(x) \leq \alpha\}.$$

$\Gamma\text{П}_\alpha$ это не величина убытка, который мы можем получить, а это уровень убытков, который будет превышен с определенной вероятностью, установленной априорно. Подобно СОП_α , $\Gamma\text{П}_\alpha$ — спектральная мера с функцией неприятия риска $\varphi(z)$, имеющей вид невырожденной *дельта-функции Дирака*, которая придает убытку γ (см. рис. 3) бесконечный вес, а всем другим возможным убыткам/доходам — нулевой вес. Напомним, что дельта-функция Дирака определяется как функция, равная нулю на всей действительной оси, кроме 0, где она равна бесконечности, при этом ее интеграл равен 1.

Если мы положим

$$\varphi(z) = \text{Dirac}(z - \alpha),$$

то получим:

$$\Gamma\text{П}_\alpha = -\int_0^1 \text{Dirac}(z - \alpha) F^{-1}(z) dz = -F^{-1}(\alpha). \quad (10)$$

В выражении (10) использовалась функция Дирака, которая аккумулирует всю плотность в точке α (функция не равна нулю только при $z = \alpha$). Спектр $\Gamma\text{П}_\alpha$ представлен на рис. 3.

Воспользовавшись теоремой 3, получаем, что $\Gamma\text{П}_\alpha$ не является *согласованной мерой риска*, так как, хотя спектр меры неотрицателен и его интеграл по отрезку $[0, 1]$ равен единице

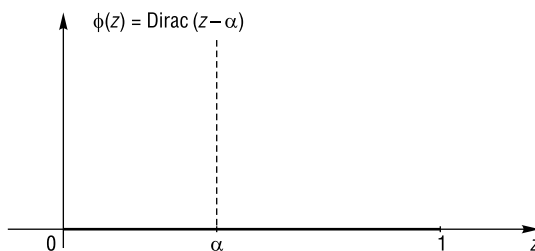


Рис. 3. Графическое представление спектра меры $\Gamma\text{П}_\alpha$

(в соответствии с определением функции Дирака), ее спектр не является невозрастающей функцией: формально, он сначала возрастает, а затем убывает.

Можно спросить: какое именно условие в определении согласованной меры риска не выполняется? Ответом будет: для Π_α не выполняется свойство субаддитивности. Таким образом, можно составить два портфеля так, что

$$\Pi_\alpha(\Delta P_{t,1} + \Delta P_{t,2}) > \Pi_\alpha(\Delta P_{t,1}) + \Pi_\alpha(\Delta P_{t,2}).$$

Пример 2. Не-субаддитивность Π_α .

Предположим, имеется объединенный портфель, составленный из портфеля Трейдера А и портфеля Трейдера Б. Портфель трейдера А состоит из проданного опциона «PUT» (без денег), а портфель трейдера Б состоит из проданного опциона «CALL» (без денег), причем до истечения срока их действия остается один день⁶.

Обработка данных предыстории подобных опционов позволила оценить вероятность исполнения «в деньгах» каждого из этих опционов величиной 4%.

Таким образом, каждый из трейдеров, А и Б, имеет портфель, который имеет 96%-й шанс вообще не потерять деньги. Например, $\Pi_{0,05} = 0$ для каждого из них. Однако объединенный портфель имеет лишь 92%-й шанс не потерять деньги, так что для него $\Pi_{0,05} > 0$.

Подходы к оценке риска с использованием Π_α подвергаются серьезной критике на том основании, что эта мера не является согласованной (из-за того, что Π_α не обладает свойством субаддитивности, см. [Artzner и др.(1999)]; [Acerbi(2004)]).

Если не выполняется свойство субаддитивности, то это может привести к странным и нежелательным последствиям: например, при использовании Π_α для установки размера гарантийного депозита на фьючерсных рынках не учитываются возможные убытки, превышающие Π_α , что может подвергнуть оценщиков значительному риску очень больших потерь, превышающих Π_α . Одно из важных последствий использования такой не-субаддитивной меры риска, как Π_α , для установки размера гарантийного депозита состоит в том, что инвесторы могут разбить свои счета на несколько групп так, чтобы уменьшить суммарный размер гарантийного депозита и, тем самым, подвергнуть организаторов биржи скрытому остаточному риску, против которого они не будут иметь никакого эффективного обеспечения со стороны ее инвесторов. Кроме того, банк, открывающий эти счета, мог бы оставаться в неведении относительно взятого на себя риска: подобный метод вкупе с фальшивыми хедж-позициями использовал французский трейдер Жером Кервьель, чтобы скрыть свои огромные позиции на рынке Eurex, что впоследствии вызвало более чем 5 миллиардные убытки в Société Générale.

Несмотря на вышеизложенные критические замечания, последнее Базельское соглашение сосредоточено, в значительной степени, на использовании Π_α . Как такое возможно? Основное препятствие для перехода к согласованной мере риска (например, к COPI_α) — тестирование на исторических данных: тестирование Π_α на исторических данных довольно

⁶ Опционы «PUT» и «CALL» дают право их владельцам соответственно продать и купить определенный товар по определенной цене. Если в опционе «PUT» оговоренная цена продажи ниже рыночной, то он называется на настоящий момент опционом «без денег». Соответственно, если в опционе «CALL» оговоренная цена покупки выше рыночной, то он называется на текущий момент опционом «без денег». Владелец опциона реализует свое право покупки (продажи) у продавшего ему опцион трейдера в «безденежной» ситуации. В этом случае трейдер несет убытки.

просто, и это мы увидим в следующем разделе, тогда как тестирование СОП_α (или, в общем случае, любой спектральной меры риска) на исторических данных — более сложная задача, предлагаемые решения которой оцениваются неоднозначно. Поэтому везде далее мы сосредоточимся, главным образом, на использовании ГП_α , даже если использование другой меры риска кажется более целесообразным.

Пример 3. ГП_α для случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Пусть случайная величина подчинена (μ, σ^2) -нормальному распределению (т.е. $\Delta P_t \sim N(\mu, \sigma^2)$). Тогда

$$P(\Delta P_t \leq -\gamma) = P\left\{\frac{\Delta P_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{-\gamma - \mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{-\gamma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \Phi\left(\frac{-\gamma - \mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — стандартное нормальное распределение, квантиль уровня α которого обозначим через $\Phi^{-1}(\alpha)$. Тогда

$$\frac{-\gamma - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \Rightarrow \gamma = -\mu - \Phi^{-1}(\alpha)\sigma = -\mu + \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma.$$

Последнее равенство справедливо в силу симметричности стандартного нормального распределения.

На рис. 4 графически представлен квантиль уровня $\alpha = 0,05$ стандартного нормального распределения ($\Phi^{-1}(0,05) = -1,645$, соответственно $\text{ГП}_{0,05} = 1,645$).

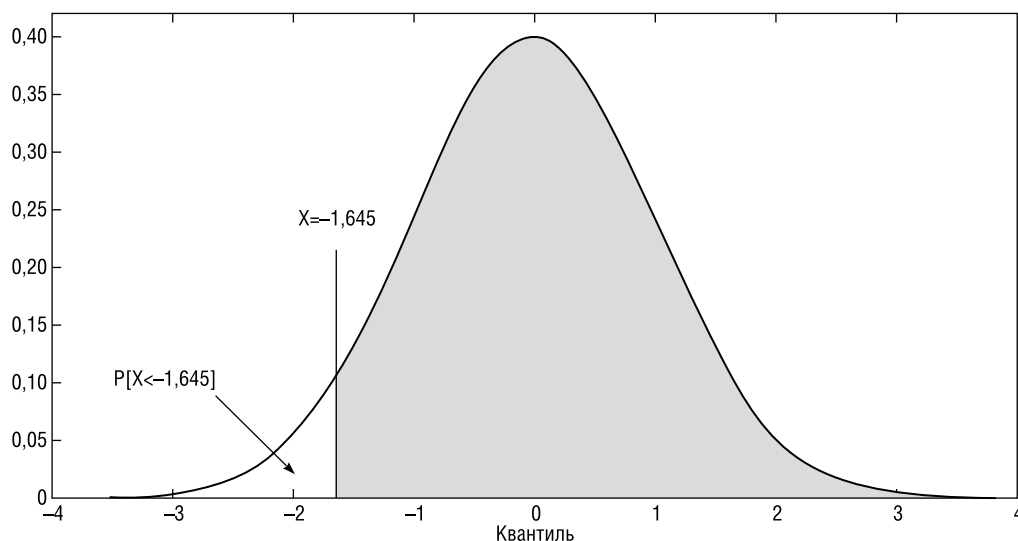


Рис. 4. Квантиль уровня 0,05 для случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение (соответственно $\text{ГП}_{0,05} = 1,645$)

Пример 4. Нефтяные теплоэнергетические фьючерсы на рынке «NYMEX».

Ниже изображен график функции плотности распределения стоимости портфеля фьючерсов с трехдневным сроком, построенный по историческим данным.

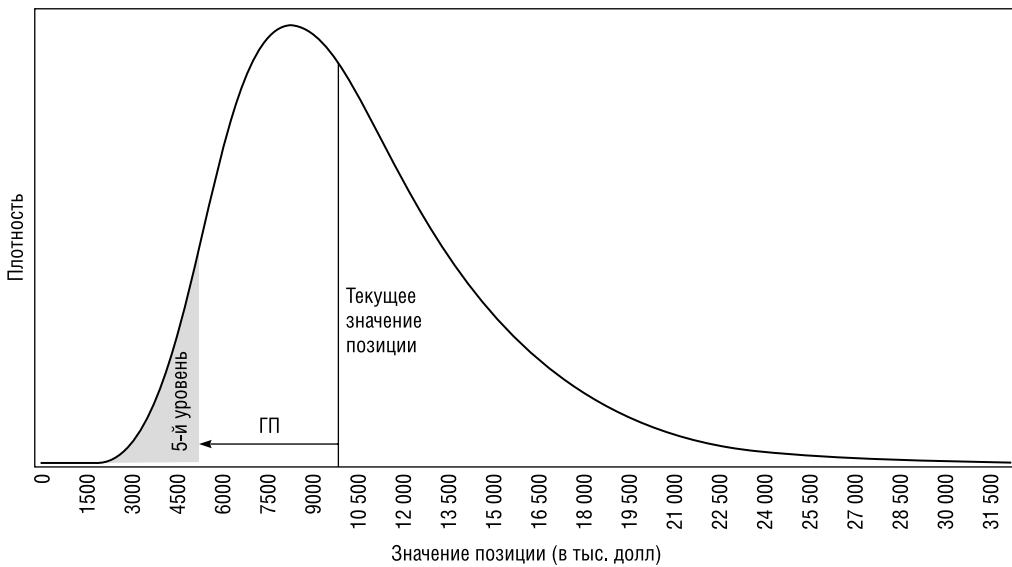


Рис. 5. График функции плотности распределения стоимости портфеля фьючерсов с трехдневным сроком, построенный по историческим данным

На графике отмечены величина «сегодняшней» стоимости портфеля («текущее значение позиции») и 5%-й уровень границы потерь $ГП = ГП_{0,05}(t, 3)$. Разница между текущим значением позиции и $ГП_{0,05}(t, 3)$ составляет 5 млн долларов. Таким образом, когда говорится, что позиция имеет трехдневный $ГП_{0,05}$ в 5 млн долларов, подразумевается, что мы на 95% уверены, что значение позиции не уменьшится больше, чем на 5 млн долларов за следующие три дня. Однако, есть 5%-я вероятность того, что потери могут превысить уровень в 5 млн долларов, а в экстремальных случаях они могут составить значительно большую сумму.

2.1.6. Расчет границы потерь по нетто-доходностям и лог-доходностям

Пока что была вычислена $ГП_{\alpha}$ для изменения цены некоторого финансового актива за один шаг $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$. Однако во многих финансовых приложениях вместо предположений относительно распределения изменений цены за l шагов, $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$, делаются некоторые предположения относительно распределения l -периодных нетто- или лог-доходностей. Вычислим $ГП_{\alpha}(t, l)$ для $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$ при условии, что нам дано распределение l -периодной нетто-доходности или распределение l -периодной лог-доходности.

- Вычислим $ГП_{\alpha}(t, l)$ для $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$ ($ГП_t(\alpha, l)$), если задано распределение l -периодной нетто-доходности $r_t(l) = (P_t - P_{t-l})/P_{t-l}$:

$$\alpha = P[P_t - P_{t-l} \leq -ГП_{\alpha}(t, l)] = P\left\{\frac{P_t - P_{t-l}}{P_{t-l}} \leq -\frac{ГП_{\alpha}(t, l)}{P_{t-l}}\right\} = P\left\{r_t(l) \leq -\frac{ГП_{\alpha}(t, l)}{P_{t-l}}\right\} = P\{r_t(l) \leq F_l^{-1}(\alpha)\},$$

где $r_t(l)$ — l -периодная нетто-доходность, а $F_l^{-1}(\alpha)$ — квантиль (или обобщенная обратная функция) функции распределения $F_l(x)$ нетто-доходности $r_t(l)$. Отсюда следует

$$ГП_{\alpha}(t, l) = -P_{t-l} F_l^{-1}(\alpha). \quad (11)$$

• Вычислим $\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l)$ для $\Delta P_t = P_t - P_{t-l}$, если задано распределение l -периодной лог-доходности $\tilde{r}_t(l) = \ln(P_t/P_{t-l})$:

$$\begin{aligned}\alpha &= P[P_t - P_{t-l} \leq -\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l)] = P\left\{\frac{P_t}{P_{t-l}} \leq -\frac{\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right\} = P\left\{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-l}}\right) \leq \ln\left(\frac{\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right)\right\} = \\ &= P\left\{\tilde{r}_t(l) \leq \ln\left(\frac{\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l) + P_{t-l}}{P_{t-l}}\right)\right\} = P\{\tilde{r}_t(l) \leq \tilde{F}_l^{-1}(\alpha)\},\end{aligned}$$

где $\tilde{r}_t(l)$ — l -периодная лог-доходность, а $\tilde{F}_l^{-1}(\alpha)$ — квантиль (или обобщенная обратная функция) функции распределения $\tilde{F}_l(x)$ лог-доходности $\tilde{r}_t(l)$. Отсюда немедленно получаем, что

$$\Gamma\Pi_{\alpha}(t, l) = -P_{t-l} \cdot (\exp(\tilde{F}_l^{-1}(\alpha)) - 1). \quad (11a)$$

Обычно в литературе по финансам используются лог-доходности. Одно из преимуществ лог-доходностей состоит в том, что можно легко вычислить лог-доходность за K дней, которая равна сумме ежедневных лог-доходностей за каждый из этих K дней. Однако, в рыночной практике обычно используется формула $\Gamma\Pi_{\alpha}$ для нетто-доходностей, в которую вместо нетто-доходностей подставляют лог-доходности: необходимо помнить, что это лишь приближение, справедливое для малых значений лог-доходностей. Для более подробной информации см. [Christoffersen (2003), глава 3 и приложение 3.10].

Пример 5. Предположим, что ежедневные лог-доходности портфеля имеют нормальное распределение со средним μ_r и дисперсией σ_r^2 .

- Пусть $\alpha = 1\%$, $l = 10$ дней, $P_{t-l} = \$10$ млн, $\mu_r = 0,1\%$ и $\sigma_r = 1,5\%$. Среднее и стандартное отклонение 10-дневной доходности равны

$$10 \cdot \mu_r = 0,01,$$

$$\sqrt{10} \cdot \sigma_r = \sqrt{10} \cdot 0,015 = 0,0474,$$

соответственно.

1%-квантиль стандартного нормального распределения равен

$$\Phi^{-1}(0,01) = -2,3263.$$

Следовательно, граница потерь уровня 1% для 10-дневного периода по лог-доходностям равна

$$\Gamma\Pi_{0,01}(t, 10) = -P_{t-l} \left(e^{(\Phi^{-1}(0,01) \cdot \sqrt{10} \sigma_r + 10 \mu_r)} - 1 \right) = -\$10 \text{ млн} \cdot (0,9044 - 1) = \$0,956 \text{ млн}.$$

- Пусть $\alpha = 1\%$, $l = 30$ дней, $P_{t-l} = \$500$ млн, $\mu_r = 0,05\%$ и $\sigma_r = 1,3\%$, тогда

$$\Gamma\Pi_{0,01}(t, 30) = -500 \left(e^{(-2,3263 \cdot \sqrt{30} \cdot 0,013 + 30 \cdot 0,0005)} - 1 \right) = 69,9220848.$$

Следовательно, $\Gamma\Pi_{0,01}(t, 30) = \$69,922$ млн или 13,98%.

- Пусть $\alpha = 1\%$, $l = 30$ дней, $P_{t-l} = \$500$ млн, $\mu_r = 0,05\%$ и $\sigma_r = 1,4\%$, тогда

$$\Gamma\Pi_{0,01}(t, 30) = -500 \left(e^{(-2,3263 \cdot \sqrt{30} \cdot 0,014 + 30 \cdot 0,0005)} - 1 \right) = 75,3672319.$$

Следовательно, $\Gamma\Pi_{0,01}(t, 30) = \$75,367$ млн или 15,07%.

Заметим, что если изменить ежедневную волатильность лишь на 0,1% (это соответствует изменению годовой волатильности на 1,58%, где идет пересчет на год с 250 операционными днями), абсолютная разница между рассчитанными границами потерь уровня 0,01 30-дневного периода в каждом из этих двух случаев составит 5,445 млн долларов, а относительная разница 1,09%. Этот пример показывает, что даже небольшие ошибки в расчетах существенно влияют на величину границы потерь.

2.1.7. Условная граница потерь уровня α (УГП $_{\alpha}$)⁷

Для того чтобы преодолеть недостатки меры ГП $_{\alpha}$, была предложена другая мера риска: условная ГП $_{\alpha}$, или УГП $_{\alpha}$. Основная проблема меры ГП $_{\alpha}$ состоит в том, что она не учитывает убытки, большие определенного уровня, поэтому было предложено решать эту проблему, беря среднее значение по всем ГП $_q$ от $q = 0$ до необходимого уровня (например, до уровня α):

$$\text{УГП}_{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \text{ГП}_q dq.$$

Пусть случайная величина ΔP_t имеет непрерывную функцию распределения F . Вспоминая определение ГП $_q(\Delta P_t)$ (10), получим:

$$\text{УГП}_{\alpha}(\Delta P_t) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-1}(q) dq,$$

т. е. УГП $_{\alpha}(\Delta P_t)$ совпадает с СОП $_{\alpha}(\Delta P_t)$. Если распределение F не является непрерывным, то УГП $_{\alpha}(\Delta P_t)$ и СОП $_{\alpha}(\Delta P_t)$ уже не совпадают (см. [Rockafellar, Uryasev (2002)]). Перед тем как продолжить описание свойств УГП $_{\alpha}$, введем некоторые обозначения. Пусть:

- случайный вектор y описывает неопределенность. Это может быть, например, вектор доходностей или вектор курсов акций (последнее соответствует вектору, i -я компонента которого ΔP_t^i , где $i = 1, \dots, N$);
- вектор x — вектор весов портфеля, независимый от y (условие независимости весьма важно при описании свойства выпуклости);
- $z = f(x, y)$ — доход/убыток портфеля с вектором весов x ; далее будем рассматривать в качестве «дохода/убытков» разность $\Delta P_t = P_{t-1} - P_t$, так что убыточные значения z будут положительными, а ГП $_{\alpha}$ будет квантилем функции распределения случайной величины z при значениях α , близких к единице;
- $\Psi(x, \cdot)$ — функция распределения дохода/убытка z ;
- $\zeta_{\alpha}(x)$ — ГП $_{\alpha}$ дохода/убытка портфеля с вектором весов x .

Теперь опишем предложенный в статье [Rockafellar, Uryasev (2002)] подход к определению УГП $_{\alpha}$ в общем случае, когда функция распределения F произвольна (не обязательно непрерывна). Прежде введем четыре определения.

1. Верхняя условная граница потерь уровня α (обозн. УГП $_{\alpha}^{+}$) — это среднее значение худших потерь, строго больших ГП $_{\alpha}$ (в использованных ранее терминах, это СОП $_{\alpha}$):

$$\text{УГП}_{\alpha}^{+} = E[f(x, y) | f(x, y) > \zeta_{\alpha}(x)].$$

⁷ В англоязычной литературе этот показатель называется «The Conditional Value at Risk» и обозначается CVaR $_{\alpha}$.

2. Нижняя условная граница потерь уровня α (обозн. $УГП_{\alpha}^{-}$) — это среднее значение худших потерь, не меньших $ГП_{\alpha}$, т. е. потерь, которые больше или равны $ГП_{\alpha}$:

$$УГП_{\alpha}^{-} = E[f(x, y) | f(x, y) \geq \zeta_{\alpha}(x)].$$

$УГП_{\alpha}^{-}$ также называют «хвостовой границей потерь уровня α ».

3. α -«хвостовое» распределение (обозн. $\Psi_{\alpha}(x, \zeta)$), соответствующее функции распределения $\Psi(x, \zeta)$ случайной величины $z = f(x, y)$, определяется следующим образом:

$$\Psi_{\alpha}(x, \zeta) = f(y) = \begin{cases} 0, & \zeta < \zeta_{\alpha}(x), \\ [\Psi(x, \zeta) - \alpha] / [1 - \alpha], & \zeta \geq \zeta_{\alpha}(x). \end{cases}$$

4. Условная граница потерь уровня α (обозн. $УГП_{\alpha}$), отвечающая случайной величине $z = f(x, y)$, — это среднее случайной величины, имеющей α -«хвостовое» распределение, соответствующее функции распределения $\Psi(x, \zeta)$ случайной величины $z = f(x, y)$.

Согласно следующей теореме, $УГП_{\alpha}$ равна взвешенному среднему $ГП_{\alpha}$ и $УГП_{\alpha}^{+}$.

Теорема 4. Пусть $\lambda_{\alpha}(x)$ — значение α -«хвостового» распределения в точке $\zeta_{\alpha}(x)$, а именно,

$$\lambda_{\alpha}(x) = [\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) - \alpha] / [1 - \alpha], \quad 0 \leq \lambda_{\alpha} \leq 1.$$

Если $\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) < 1$ (т. е. существует ненулевая вероятность того, что потери будут не больше $\zeta_{\alpha}(x)$), тогда

$$0 \leq \lambda_{\alpha}(x) < 1$$

и
$$УГП_{\alpha} = \lambda_{\alpha}(x)\zeta_{\alpha}(x) + [1 - \lambda_{\alpha}(x)]УГП_{\alpha}^{+} = \lambda_{\alpha}(x)ГП_{\alpha} + [1 - \lambda_{\alpha}(x)]УГП_{\alpha}^{+}.$$

Если же $\Psi(x, \zeta_{\alpha}(x)) = 1$ (т. е. $\zeta_{\alpha}(x)$ — это наибольшая возможная потеря), тогда

$$УГП_{\alpha} = \zeta_{\alpha}(x).$$

Результаты теоремы не должны удивлять, поскольку они относятся к произвольным функциям распределения, которые могут быть и дискретными.

Более того, в статье [Rockafellar, Uryasev (2002)] доказывается, что $УГП_{\alpha}$ является согласованной мерой риска и выпукла, последнее имеет значение для линейного программирования и оптимизации портфеля.

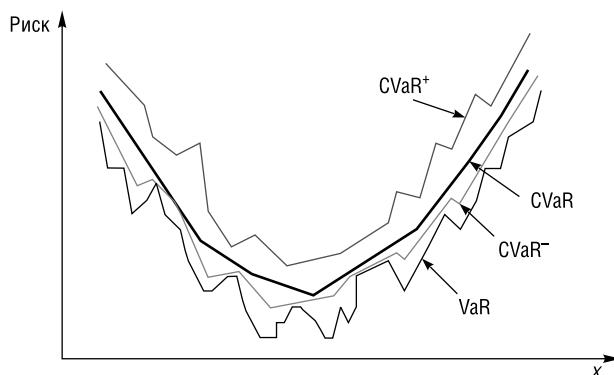


Рис. 6. $УГП_{\alpha}$ выпукла, но $ГП_{\alpha}$, $УГП_{\alpha}^{-}$, $УГП_{\alpha}^{+}$ могут быть невыпуклы!

Пример 6. $ГП_\alpha$ и $УГП_\alpha$ для случайной величины, имеющей нормальное распределение.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение со средним μ и стандартным отклонением σ . Тогда получим:

$$ГП_\alpha(\xi) = \zeta_\alpha(\xi) = \mu + k_1(\alpha)\sigma, \quad k_1(0,05) = -1,65,$$

$$УГП_\alpha(\xi) = E[\xi | \xi \geq \zeta_\alpha(\xi)] = \mu + k_2(\alpha)\sigma, \quad k_2(0,05) = -2,06.$$

Пример 7. $ГП_\alpha$ и $УГП_\alpha$ для дискретного распределения.

Предположим, что дискретная случайная величина ξ может принимать шесть равновероятных значений: $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$. Возьмем $\alpha = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, тогда

$$\lambda_\alpha = (\Psi(\zeta_\alpha) - \alpha) / (1 - \alpha) = (4/6 - 4/6) / (1 - 4/6) = 0,$$

$$УГП_\alpha = 0 \cdot ГП_\alpha + 1 \cdot УГП_\alpha^+ = УГП_\alpha^+ = \frac{1}{2}f_5 + \frac{1}{2}f_6.$$

Следовательно, мы получаем $ГП_\alpha \leq УГП_\alpha^- \leq УГП_\alpha = УГП_\alpha^+$.

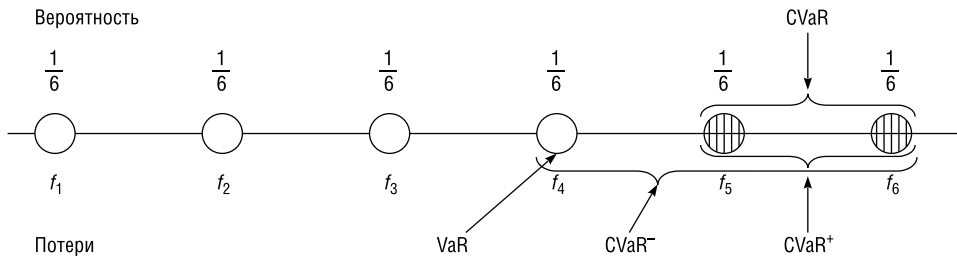


Рис. 7. $ГП_\alpha$, $УГП_\alpha^-$, $УГП_\alpha^+$, $УГП_\alpha$ для дискретной случайной величины ξ

Пример 8. $ГП_\alpha$ и $УГП_\alpha$ для дискретного распределения.

Предположим, что дискретная случайная величина η может принимать шесть равновероятных значений: $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$. Возьмем $\alpha = \frac{5}{12}$, тогда

$$\lambda_\alpha = (\alpha - \Psi(\zeta_\alpha)) / \alpha = (5/12 - 4/12) / (5/12) = 1/5,$$

$$УГП_\alpha = 1/5 \cdot ГП_\alpha + 4/5 \cdot УГП_\alpha^+ = \frac{2}{5}f_1 + \frac{3}{5}f_2.$$

Следовательно, мы получаем $ГП_\alpha \leq УГП_\alpha^- \leq УГП_\alpha \leq УГП_\alpha^+$.

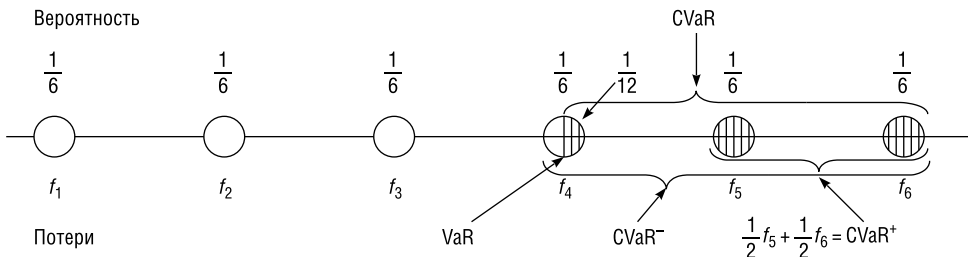


Рис. 8. $ГП_\alpha$, $УГП_\alpha^-$, $УГП_\alpha^+$, $УГП_\alpha$ для дискретной случайной величины η

2.2. Обзор стандартных методов управления рыночными рисками

До сих пор мы определили основные понятия и инструменты, используемые в управлении финансовым риском. Далее проанализируем стандартные методологии управления рыночными рисками.

Стандартные методики, связанные с расчетами управлением рыночными рисками, можно разделить на две группы:

- *Аналитические методы*: текущая стоимость портфеля вычисляется в зависимости от текущих значений факторов риска на основании некоторой параметрической модели, в которой обуславливается воздействие изменений факторов риска на стоимость портфеля.

Стандартная техника этого семейства методов реализована, например, в дисперсионно-ковариационном методе (ДКМ) и в методе дельта-гамма; оба эти метода дают возможность управления риском.

- *Имитационные методы*: для каждого сценария из некоторого диапазона сценариев изменений факторов риска оценивается стоимость портфеля. В результате получим ряд из стоимостей портфеля, по которому построим эмпирическую функцию распределения. $ГП_\alpha$ этого портфеля будем оценивать соответствующим квантилем построенной эмпирической функции распределения.

В зависимости от условий, факторами рыночного риска могут быть курсы акций, индексы, процентные ставки, обменные курсы, цены на драгоценные металлы, цены на сырьевые товары и т. д.

Важные примеры методов этой группы — историческое моделирование (ИМ), моделирование методом Монте-Карло (ММК) и полная оценка (ПО) для управления опционным риском.

Если используются аналитические методы, то необходимо выбрать некоторую функцию распределения, адекватную нашим данным. После чего оцениваем параметры выбранного распределения, например, в случае нормального распределения оцениваем среднее значение и стандартное отклонение. Однако часто бывает, что, выбирая какую-нибудь хорошо известную функцию распределения, мы неадекватно описываем распределение анализируемых данных. Но можно воспользоваться методами имитационного моделирования, с помощью которых иногда получается более точное приближение для функции распределения.

2.2.1. Дисперсионно-ковариационный метод (ДКМ)

Идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, чтобы оценивать распределение доходностей (или изменений цен), линеаризуя доходность портфеля и предполагая, что факторы риска имеют нормальное распределение.

Пусть $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$ — совокупность лог-доходностей на день t (факторы риска). Положим $r_{p,t}$ — лог-доходность портфеля на день t и пусть $r_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t} = \mathbf{w}'\mathbf{r}_t$. Поскольку $\mathbf{r}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, получим, что

$$r_{p,t} \sim N(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}).$$

Вектор средних $\boldsymbol{\mu}$ и ковариационная матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ оцениваются по наблюдениям $r_{t-\tau}, \dots, r_t$ и в результате функция распределения доходности портфеля оценивается нормальным рас-

пределением со средним $\hat{\mu}$ и стандартным отклонением $\mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}$, $N(\mathbf{w}'\hat{\mu}, \mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w})$, где $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ — оценки параметров μ и Σ , соответственно.

Тогда $\Gamma\Gamma_{\alpha}$ оценивается величиной

$$\Gamma\Gamma_{\alpha} = \mathbf{w}'\hat{\mu} + \Phi^{-1}(\alpha)\mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}.$$

2.2.2. Дельта-гамма аппроксимации для нелинейных портфелей

Если в наш портфель включены нелинейные инструменты, такие как опционы, то предыдущий метод использовать уже нельзя. Один из первых подходов к решению такой задачи состоял в том, чтобы измерять влияние локального изменения факторов риска на стоимость портфеля с помощью среднего для производных, т. е. использовать приближения к нелинейным ценам опциона. Если использовать приближение первого порядка, то мы имеем дельта-подход, а если использовать приближение второго порядка, тогда мы имеем гамма-подход.

Рассмотрим совокупность факторов риска $\{X_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$ и предположим, что стоимость нашего портфеля может быть записана в виде:

$$X_{p,t} = f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$$

с некоторой функцией $f: R^n \rightarrow R$. Например, это может быть линейный портфель, составленный из акций, для которого $X_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i X_{i,t}$, или опцион C на базисный актив S с ценой исполнения K и сроком обращения τ , где $C = f(S)$; функцию f можно получить, например, из формулы Блэка–Шоулса.

Предположим, что факторы риска изменяются на $\Delta_i, i = 1, \dots, n$, т. е. $X_{i,t+1} = X_{i,t} + \Delta_i$. Тогда, если $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывно дифференцируема по всем $x_i, i = 1, \dots, n$, мы можем получить аппроксимацию первого порядка для изменения стоимости портфеля:

$$\Delta = f(X_{1,t} + \Delta_1, \dots, X_{n,t} + \Delta_n) - f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \Delta_i.$$

Отметим, что если X_i — это цена, т. е. $X_i = S_{i,t}$ и $\Delta_i = S_{i,t+1} - S_{i,t}$, то

$$\Delta_i = S_{i,t} \frac{S_{i,t+1} - S_{i,t}}{S_{i,t}} = S_{i,t} R_{i,t+1}.$$

Значение первой частной производной для $f(x_1, \dots, x_n)$ по x_i в точке (X_1, \dots, X_n) обозначим через $\delta_i \left(\delta_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \right)$, его еще называют *дельтой* относительно $X_{i,t}$. Из того, что

$$\Delta \approx \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta_i,$$

мы получим приближение для условного математического ожидания и условной дисперсии изменения стоимости портфеля в следующий день $t+1$, при условии информации на сегодняшний день t :

$$\mu(\Delta) \approx \sum_{i=1}^n \delta_i E\Delta_i,$$

$$\sigma^2(\Delta) \approx \sum_{i,j \leq n} \delta_i \delta_j \text{Cov}(\Delta_i, \Delta_j)$$

или, если $X_{i,t} = S_{i,t}$:

$$\mu(\Delta) \approx \sum_{i=1}^n \delta_i S_{i,t} ER_{i,t+1},$$

$$\sigma^2(\Delta) \approx \sum_{i,j \leq n} \delta_i \delta_j S_{i,t} S_{j,t} \underbrace{\text{Cov}(R_{i,t+1}, R_{j,t+1})}_{=\sigma_{ij,t+1}}.$$

Гауссовское приближение для $\Pi_\alpha(\Delta)$ дается следующим выражением

$$\Pi_\alpha(\Delta) = \mu(\Delta) + \Phi^{-1}(\alpha)\sigma(\Delta).$$

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем $x_i, i = 1, \dots, n$, мы можем получить аппроксимацию второго порядка для изменения стоимости портфеля:

$$\Delta = f(X_{1,t} + \Delta_1, \dots, X_{n,t} + \Delta_n) - f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \Delta_i \Delta_j.$$

Следовательно,

$$\Delta \approx \sum_{i=1}^n \delta_i \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq n} \Gamma_{ij} \Delta_i \Delta_j, \quad (12)$$

где $\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_1, \dots, X_n)$ — величина, которую называют *гаммой* относительно X_i и X_j .

Для вычисления Π_α (или Π_α) можно воспользоваться приближением Корниша–Фишера (Cornish–Fisher) вместе с гамма-аппроксимацией или обратиться к так называемой гамма аппроксимации на основе моделирования: при наличии предварительно заданной модели, описывающей многомерное распределение доходностей активов (обычно берется многомерное нормальное распределение), вектор доходностей моделируется N раз из этого распределения. Эти смоделированные значения затем используются в (13) для расчета функции распределения изменения стоимости портфеля, после чего мы можем на основании этого распределения вычислять необходимые нам меры риска (для более подробной информации см. [Christoffersen (2003)]).

2.2.3. Историческое моделирование

Идея, лежащая в основе этого метода, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цены) портфеля необходимо оценивать с помощью эмпирической функции распределения, без использования каких-либо параметрических моделей. Если доходности представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины или, в более общем случае, стационарны, то сходимость эмпирической функции распределения к истинному распределению следует из закона больших чисел.

Пусть $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$ — это совокупность риск-доходностей на день t (факторы риска). Обозначим через $r_{p,t}$ лог-доходность портфеля на день t и предположим, что $r_{p,t} = f(r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$, на пример, $r_{p,t} = \sum_{i=1}^n w_i r_{i,t}$, как в случае предположений метода дисперсии-ковариации. Далее, рассмотрим исторические наблюдения за доходностями портфеля, т. е.

$$r_{p,t-\tau} \equiv f(r_{1,t-\tau}, \dots, r_{n,t-\tau}), \tau = 1, \dots, m.$$

Упорядочим $r_{p,t-\tau}, \tau = 1, \dots, m$, по возрастанию

$$r_{p,t-\tau_1} \leq r_{p,t-\tau_2} \leq \dots \leq r_{p,t-\tau_m}.$$

Тогда оценка границы потерь уровня α для $r_{p,t}$ равняется

$$\Gamma \Pi_{\alpha,t}^p = r_{t-\tau_k^*},$$

$$\text{где } k^* = \min \left\{ k = 1, \dots, m: \frac{k-1}{m} < \alpha \leq \frac{k}{m} \right\}.$$

2.2.4. Моделирование методом Монте-Карло

Идея, лежащая в основе моделирования методом Монте-Карло, состоит в том, что распределение доходностей (или изменений цен) портфеля необходимо оценивать по некоторой явной параметрической модели. В отличие от метода вариации-ковариации, нам нет необходимости представлять задачу в аналитически удобном виде, например, линеаризуя портфельную доходность $r_{p,t}$ и делая предположение о том, что вектор, составленный из факторов риска, имеет многомерное нормальное распределение. Вместо этого мы делаем выводы относительно $r_{p,t}$, используя методы Монте-Карло.

Пусть $\{r_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$ — это совокупность риск-доходностей на день t (факторы риска), $r_{p,t}$ — это лог-доходность портфеля на тот же день. Как и раньше, предположим, что $r_{p,t} = f(r_{1,t}, \dots, r_{n,t})$. Теперь вместо того, чтобы моделировать на основе прошлых наблюдений, построим модель доходностей (факторов риска). Пусть это будет многомерное t -распределение⁸:

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_t \sim t(0, \Sigma, \nu),$$

где 0 определяет вектор нулевых средних, Σ — ковариационную матрицу, а ν — число степеней свободы.

Затем по этой модели смоделируем доходности, в результате чего получим прогнозы модели для доходностей на день t . Например, для того чтобы подсчитать гипотетические доходности (факторы риска) на день t смоделируем N раз случайный вектор \mathbf{Z}_t , имеющий t -распределение

$$\tilde{\mathbf{r}}_t^k = \tilde{\mathbf{z}}_t^k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Имея множество смоделированных прогнозов факторов риска $\{\tilde{\mathbf{r}}_t^k, k = 1, \dots, N\}$, можно получить для каждого такого прогноза доходность портфеля, которая равна

$$\tilde{r}_{p,t}^k = f(r_{1,t}^k, \dots, r_{n,t}^k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Упорядочим их по возрастанию

$$\tilde{r}_{p,t}^{(1)} \leq \dots \leq \tilde{r}_{p,t}^{(N)}.$$

Оценка границы потерь уровня α для $r_{p,t}$ равна

$$\Gamma \Pi_{\alpha}^p(1,t) = \tilde{r}_t^{(k^*)},$$

$$\text{где } k^* = \min \left\{ k = 1, \dots, N: \frac{k-1}{N} < \alpha \leq \frac{k}{N} \right\}.$$

⁸ Многомерное $t(a; \Sigma; \nu)$ -распределение является обобщением стандартного одномерного распределения Стьюдента. Оно определяется параметрами трех видов: вектором сдвига (средних значений) a , ковариационной матрицей Σ и числом степеней свободы ν . Подробнее см., например, статью С. А. Айвазяна в разделе «Консультации» журнала «Прикладная эконометрика» № 1 за 2008 год.

2.2.5. Модели полной оценки

Линейные и квадратичные приближения к нелинейности, возникающей в результате включения в портфель таких инструментов, как опционы, дают в некоторых случаях весьма плохие оценки ГП. Это обычно происходит тогда, когда портфель содержит опционы с различными ценами исполнения.

В таких сложных портфелях единственно возможный метод, который можно использовать для вычисления необходимой меры риска, это, так называемый, метод полной оценки (МПО). Метод полной оценки состоит в том, что много раз моделируются будущие (гипотетические) цены базового актива, и, используя модели ценообразования опционов, для каждой смоделированной цены базового актива рассчитываются цены опционов.

Вновь рассмотрим набор факторов риска $\{X_{i,t}, i = 1, \dots, n\}$ и предположим, что стоимость портфеля равна

$$X_{p,t} = f(X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$$

для некоторой функции $f: R^n \rightarrow R$. В качестве примера можно привести портфель, состоящий из опциона C на базисный актив S с ценой исполнения K и сроком обращения τ , где $C = f(S)$, функция f получается, например, из формулы Блэка-Шоулса.

При использовании метода полной оценки делаются предположения относительно вида функции распределения доходностей базовых активов, т. е. относительно функции распределения $X_{i,t}$, и, применяя для моделирования будущих (гипотетических) доходностей базовых активов на K дней вперед метод Монте-Карло, получим

$$X_{1,t+K}^h, \dots, X_{n,t+K}^h, h = 1, \dots, N.$$

На основании этих смоделированных сценариев для доходностей базовых активов на K дней вперед мы определяем стоимости нашего нелинейного портфеля для каждого такого сценария, используя, например, формулу Блэка-Шоулса, после чего по ряду стоимостей (для каждого сценария доходностей) нашего портфеля можно вычислять необходимые нам меры риска.

Метод полной оценки имеет преимущество в том, что он концептуально очень прост и не использует аппроксимаций. Однако он требует намного больших вычислительных усилий, поскольку должны быть вычислены будущие (гипотетические) цены каждого опционного контракта для каждого смоделированного сценария будущих цен на базисный актив. Поэтому критерии скорости вычислений могут диктовать выбор между более точным, но медленным методом полной оценки и методами приближений, которые работают намного быстрее.

2.3. Использование одномерной GARCH модели в анализе границы потерь

До сих пор мы рассматривали модели, с помощью которых изучали рыночные доходности с точки зрения безусловной перспективы. Однако хорошо известно, что для финансовых рынков характерны меняющиеся во времени моменты, и, если мы пренебрегаем этим аспектом, мы можем недооценить или переоценить нужную меру риска, например, ГП_α . Кроме того, с помощью условных моделей с меняющимися во времени характеристиками можно проще (чем с помощью безусловных моделей) учитывать безусловную ненормальность дан-

ных. Вот почему использование моделей GARCH⁹ для управления рыночным риском стало обычной практикой среди специалистов в области финансов.

Предположим, что в момент t мы инвестировали сумму P_t в некоторый актив, и нам необходимо вычислить ΓP_α в момент $t + 1$. Тогда, если мы используем условную ARMA–GARCH модель для нетто-доходностей или лог-доходностей этого актива, то получим:

- для нетто-доходностей ΓP_α на момент времени $t + 1$ равна

$$\Gamma P_t(\alpha, l = 1) = P_t \cdot [\exp(\hat{r}_{t+1} + F_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2}) - 1], \quad (13)$$

- для лог-доходностей ΓP_α на момент времени $t + 1$ равна

$$\Gamma P_t(\alpha, l = 1) = P_t \cdot [\hat{r}_{t+1} + F_\alpha^{-1} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{t+1}^2}], \quad (14)$$

где применяем соотношение (11) для нетто-доходностей и (11а) для лог-доходностей. Если стандартизованные ошибки GARCH модели η имеют стандартное нормальное распределение, то

$$F_\alpha^{-1} = \Phi^{-1}(\alpha).$$

Если же стандартизованные ошибки GARCH модели η имеют стандартное t распределение, т. е. $\sqrt{v/(v-2)}\eta \sim t_v$, где t_v — это одномерное условное t , тогда

$$F_\alpha^{-1} = \sqrt{\frac{v-2}{v}} t_v^{-1}(\alpha).$$

Пример 9. Рассмотрим временной ряд, состоящий из 9190 ежедневных лог-доходностей $((r_t)_{t=1}^{9190})$. Для того чтобы рассчитать однодневную ΓP в момент времени $t = 9190$ по длинной позиции в 10 млн долларов, воспользуемся AR–GARCH моделью.

Пусть z_t имеет стандартное нормальное распределение и подобранная модель для $(r_t)_{t=1}^{9190}$ такова:

$$r_t = 0,00066 - 0,0247r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = z_t \sqrt{\sigma_t^2},$$

$$\sigma_t^2 = 0,00000389 + 0,0799\varepsilon_{t-1}^2 + 0,9073\sigma_{t-1}^2.$$

Поскольку $r_{9189} = -0,00201$, $r_{9190} = -0,0128$ и $\sigma_{9190}^2 = 0,00033455$, то, в соответствии с подобранной моделью AR(2)–GARCH(1,1), одношаговый прогноз таков:

$$\hat{r}_{9190}(1) \equiv \hat{E}[r_{9191} | \Omega_{9190}] = 0,00066 - 0,0247 \cdot (-0,00201) = 0,00071,$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{9190}^2(1) &\equiv \hat{Var}[\varepsilon_{9191} | \Omega_{9190}] = 0,00000389 + 0,0799 \cdot (-0,0128 - 0,00066 + 0,0247 \cdot (-0,00201))^2 + \\ &+ 0,9073 \cdot 0,00033455 = 0,0003211, \end{aligned}$$

однодневная граница потерь на уровне 5% равна

⁹ Сведения об ARCH- и GARCH- моделях см., например, в разделе «Консультации» журнала «Прикладная эконометрика» № 4 за 2007 год.

$$\begin{aligned} \Gamma_t(5\%, 1) &= -\$10\,000\,000 [\exp(\hat{r}_{9190}(1) - 1,6449 \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{9190}^2(1)}) - 1] = \\ &= -\$10\,000\,000 [\exp(0,00071 - 1,6449 \cdot \sqrt{0,0003211}) - 1] = \$283\,556. \end{aligned}$$

С вероятностью 95%, возможные потери на следующий день по такой позиции составят сумму не большую, чем \$283 556.

Если мы рассчитываем границу потерь на уровне 1%, получим

$$\Gamma_t(5\%, 1) = -\$10\,000\,000 [\exp(0,00071 - 2,3262 \cdot \sqrt{0,0003211}) - 1] = \$401\,457.$$

В этом случае граница потерь позиции равна \$401 457.

2.4. Методы оценки $\Gamma\Gamma_\alpha$, использующие M-GARCH модели¹⁰

Предположим, что портфель составлен из N активов. Пусть в начальный момент в i -й актив инвестируется сумма $W_i = w_i W$, где W — общая сумма инвестиций в портфель, w_i — доля актива i в портфеле.

Пусть \mathbf{w} — вектор долей активов в портфеле, \mathbf{Y} — вектор доходностей, $\boldsymbol{\mu}$ — вектор ожидаемых доходностей и Σ — ковариационная матрица доходностей. Тогда

$$\begin{aligned} R_p &= \mathbf{w}'\mathbf{Y}, \\ E[R_p] &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \\ \text{Var}[R_p] &= \sigma_p^2 = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (15)$$

Граница потерь уровня α для портфеля стоимостью W в начальный момент времени — это минимальная потеря в доле α всех худших результатов:

$$\Gamma\Gamma_\alpha^{(p)} = W \times q_p(\alpha), \quad (16)$$

где $q_p(\alpha)$ определяется условием

$$\Pr[R_p < q_p(\alpha)] = \alpha. \quad (17)$$

Например, если $R_p \sim N(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \sigma_p^2)$, то

$$\Gamma\Gamma_\alpha^{(p)} = (\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} + z_\alpha \sigma_p)W = (\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}})W, \quad (18)$$

где z_α — это $\alpha\%$ -квантиль $N(0,1)$ распределения.

Предположение о том, что вектор средних $\boldsymbol{\mu}$ и ковариационная матрица Σ не меняются со временем, весьма ограничительно. Одна из возможностей обойти это ограничение — оценивать одномерную модель GARCH для $\sigma_{p,t}^2$, но у такого подхода есть недостаток, заключающийся в том, что каждый раз, как мы меняем структуру портфеля \mathbf{w} , нам необходимо переоценивать модель. Однако, если мы подгоняем M-GARCH модель к нашим данным ($\boldsymbol{\mu}_t$ и Σ_t вместо $\boldsymbol{\mu}$ и Σ), то многомерное распределение доходностей может быть использовано для расчета функции распределения и границ потерь в момент t для любого портфеля, и в этом случае нет необходимости каждый раз при изменении структуры портфеля переоценивать

¹⁰ О M-GARCH моделях см., например, в [Bauwens, Laurent, Rombouts(2006)].

модель. Следовательно, можно легко определять чувствительность границы потерь (ГП) по отношению к изменениям в структуре портфеля. А значит, можно выбрать вектор весов \mathbf{w} таким образом, что прогнозируемое значение ГП для следующего периода будет равно некоторому заранее определенному значению.

Следует отметить важность учета ковариаций для вычисления ГП. Когда корреляция между доходностями отдельных активов меньше, чем 1, тогда, очевидно, что ГП портфеля меньше, чем сумма ГП активов, составляющих этот портфель.

Пример 10. В данном примере для расчета границы потерь (ГП) портфеля активов используется модель с постоянными условными корреляциями (т. е. ПУК-модель). Ковариационная матрица Σ_t может быть записана как

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= D_t R_t D_t, \\ D_t &= \text{diag}(\sigma_{1t}^2 \dots \sigma_{Nt}^2), \\ R_t &= (\rho_{ijt}) \text{ с } \rho_{iit} = 1.\end{aligned}\quad (19)$$

R_t — это матрица условных корреляций размера $N \times N$, и σ_{iit} определяется одномерной GARCH моделью. Следовательно,

$$\rho_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{i,t} \sigma_{j,t}}, \quad \forall i \neq j. \quad (20)$$

Положительная определенность матрицы Σ_t следует из положительной определенности матрицы R_t и положительности всех σ_{iit} . Постоянство корреляций означает, что

$$R_t = R = (\rho_{ij}), \quad \rho_{ii} = 1, \quad (21)$$

т. е. все условные корреляции постоянны (не зависят от t !). Следовательно,

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{\sigma_{i,t} \sigma_{j,t}}, \quad \forall i \neq j. \quad (22)$$

Таким образом, динамика ковариации определяется только динамикой двух условных дисперсий. Общее число параметров в R равно $N(N-1)/2$.

2.5. Эмпирические приложения с использованием пакета Eviews

2.5.1. Одномерная ГП

Предположим мы имеем массив данных, составленный из 1250 наблюдений за немецким фондовым индексом DAX, и хотим использовать первые 1000 наблюдений для построения модели AR(1)–GARCH(1,1) со стандартизованными ошибками, имеющими распределение Стьюдента, тогда как оставшиеся 250 наблюдений использовать для backtesting ГП. В таком случае необходимо набрать следующие команды:

```
smp1 @all
'series d_dax=dlog(dax) 'IF WE USE LOGRETURNS
series d_dax=@pch(dax) 'IF WE USE NET-RETURNS
matrix(250,5) v_a_risk
for !i=1000 to 1249
    smp1 1 !i
```

```
equation tarc1.arch(1,1, thrsh=1,tdist,m=100) d_dax c d_dax(-1)

smpl !i+1 !i+1
'FORECAST CONDITIONAL MEAN AND VARIANCE
tgarc1.fit(f=na) yhat y_se y_garch

'COLLECT THE TRUE REALIZED RETURNS
v_a_risk(!i-999,1) = @elem(d_dax,@otod(!i+1))
!gradi = tgarc1.@coefs(7)

'COMPUTE THE VAR AT DIFFERENT PROBABILITY LEVELS
v_a_risk(!i-999,2) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.01, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)) )

v_a_risk(!i-999,3) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.05, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)) )

v_a_risk(!i-999,4) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.95, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)) )

v_a_risk(!i-999,5) = @elem(yhat, @otod(!i+1)) +
@sqrt((!gradi-2)/!gradi)*@qtdist(0.99, !gradi)*sqr( @elem(y_garch, @otod(!i+1)) )

next
v_a_risk.line
```

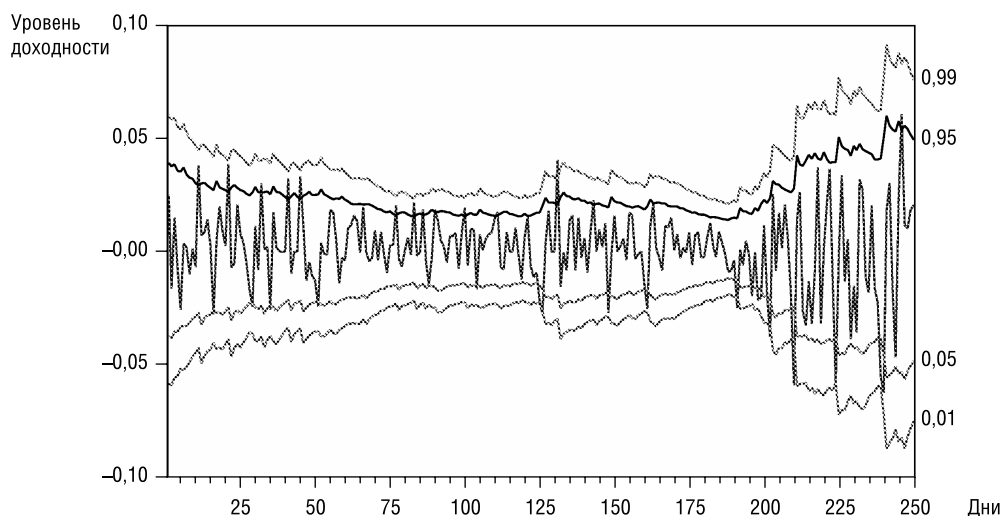


Рис. 9. ГП на уровне 1%, 5%, 95% и 99% (Стьюдент t) — индекс DAX

2.5.2. Многомерная ГП для ПУК-модели

Рассмотрим равновзвешенный портфель из трех фондовых индексов (Японского, Европейского и Американского) с ежедневными данными. Тогда программа для расчета ГП на один шаг вперед в Eviews будет выглядеть так:

```
'SET THE ESTIMATION SAMPLE
smpl 01/01/1990 05/28/2001
series y1 = rseusa
series y2 = rsejap
series y3 = reuro

'CREATE THE VECTOR OF WEIGHTS
vector(3) omega=1/3

'ESTIMATE THE THREE UNIVARIATE GARCH(1,1) MODEL
equation eq1.arch(m=100,c=1e-5) y1 c y1(-1)
equation eq2.arch(m=100,c=1e-5) y2 c y2(-1)
equation eq3.arch(m=100,c=1e-5) y3 c y3(-1)

'SET THE FORECASTING SAMPLE
smpl 05/29/2001 05/29/2001

'FORECAST THE UNIVARIATE CONDITIONAL MEANS AND VARIANCES
eq1.forecast y1hat y1se cvar1
eq2.forecast y2hat y2se cvar2
eq3.forecast y3hat y3se cvar3

'INITIALIZE A VECTOR THAT WILL CONTAIN THE FORECASTED MEANS
coef(3) mu

'EXTRACT THE FORECASTED MEANS
mu(1)=y1hat(@dt00("05/29/2001"))
mu(2)=y2hat(@dt00("05/29/2001"))
mu(3)=y3hat(@dt00("05/29/2001"))

'INITIALIZE A MATRIX THAT WILL CONTAIN THE FORECASTED STANDARD DEVIATIONS
matrix(3,3) dm=0

'EXTRACT THE FORECASTED VARIANCES
dm(1,1)=@sqrt(cvar1(@dt00("05/29/2001")))
dm(2,2)=@sqrt(cvar2(@dt00("05/29/2001")))
dm(3,3)=@sqrt(cvar3(@dt00("05/29/2001")))

'SET THE ESTIMATION SAMPLE
smpl 01/01/1990 05/28/2001

'COMPUTE THE STANDARDIZED RESIDUALS
eq1.makesresids(s) stdres1
eq2.makesresids(s) stdres2
eq3.makesresids(s) stdres3

'INITIALIZE THE CORRELATION MATRIX
matrix(3,3) rm=1

'INSERT THE ESTIMATED CORRELATIONS AMONG RESIDUALS IN THE CORRELATION MATRIX
rm(1,2)=@cor(stdres1,stdres2)
```



```
rm(1,3)=@cor(stdres1,stdres3)
rm(2,3)=@cor(stdres2,stdres3)
rm(2,1)=rm(1,2)
rm(3,1)=rm(1,3)
rm(3,2)=rm(2,3)

'GENERATE THE CONDITIONAL COVARIANCES
genr ccov12=rm(1,2)*@sqrt(cvar1*cvar2)
genr ccov13=rm(1,3)*@sqrt(cvar1*cvar3)
genr ccov23=rm(2,3)*@sqrt(cvar2*cvar3)

'CREATE THE CONDITIONAL VARIANCE/COVARIANCE MATRIX
matrix hm=dm*rm*dm

'COMPUTE THE CONDITIONAL FORECASTED VARIANCE OF THE TRIVARIATE 'PORTFOLIO
matrix cvarpf=@transpose(omega)*hm*omega

'COMPUTE THE CONDITIONAL FORECASTED MEAN OF THE TRIVARIATE PORTFOLIO
matrix cmeanpf=@transpose(omega)*mu
'COMPUTE THE VAR AT THE 5% LEVEL
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.05)*@sqrt(cvarpf)
```

2.5.3. Многомерная ГП с использованием диагональной BEKK-модели.

Сейчас рассмотрим иной подход к моделированию меняющейся во времени условной ковариационной матрицы Σ_t , а именно, рассмотрим *многомерную диагональную BEKK-модель*, впервые предложенную в статье [Engle, Kroner (1995)]:

$$Y_t = E[Y_t | F_{t-1}] + \Sigma_t^{1/2} \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0, I_n), \quad (23)$$

$$\Sigma_t^{1/2} = \Omega \Omega' + A \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A + B \Sigma_{t-1} B',$$

где $E[Y_t | F_{t-1}]$ — спецификация условного среднего для векторной AR(1)-модели, $\Sigma_t^{1/2}$ — разложение Холецкого для Σ_t , в котором A и B — диагональные матрицы: требование того, чтобы A и B были диагональными, позволяет снизить число оцениваемых параметров.

Отметим, что, хотя в Eviews 6 можно оценивать D-BEKK модель, на данный момент в этом пакете не предусмотрена процедура, которая позволила бы рассчитывать прогноз условной ковариационной матрицы Σ . Однако в личной беседе представители группы поддержки Eviews заверили, что в ближайшее время эта процедура будет включена в пакет. Следовательно, для простоты, будем рассматривать Σ_t как если бы это был прогноз на один шаг вперед к моменту времени $t + 1$.

Рассмотрим портфель из акций четырех российских эмитентов: Газпрома, Лукойла, РБК, Сбербанка. Процедура расчета ГП портфеля на один шаг вперед в Eviews выглядит следующим образом:

```
!n=4
matrix(!n) omega=1/!n
matrix(250,5) Var_port_final
```

```

for !i=751 to 950 'THIS CYCLE WILL BE REPEATED FOR 250 TIMES

'ESTIMATE THE MODEL
smpl 1 !i
system sys01
sys01.append @pch(gazprom)=c(1)+c(11)*@pch(gazprom(-1))
sys01.append @pch(lukoil)=c(2)+c(12)*@pch(lukoil(-1))
sys01.append @pch(rbk)=c(3)+c(13)*@pch(rbk(-1))
sys01.append @pch(sberbank)=c(4)+c(14)*@pch(sberbank(-1))

'sys01.arch @diagvech c(fullrank) arch(1,diag) garch(1,diag)
sys01.arch(m=70) @diagbekk c(indef) arch(1,diag) garch(1,diag)

'DO THE FORECASTING AT TIME T+1 FOR THE VECTOR OF RETURNS AND SIGMA
smpl !i+1 !i+1
series fore1 = c(1)+c(11)*@pch(gazprom(-1))
series fore2 = c(2)+c(12)*@pch(lukoil(-1))
series fore3 = c(3)+c(13)*@pch(rbk(-1))
series fore4 = c(4)+c(14)*@pch(sberbank(-1))
series true_return= (@pch(gazprom)+@pch(lukoil)+@pch(rbk)+@pch(sberbank))/!n

vector(4) mu
mu(1)= @elem(fore1, @otod(!i+1))
mu(2)= @elem(fore2, @otod(!i+1))
mu(3)= @elem(fore3, @otod(!i+1))
mu(4)= @elem(fore4, @otod(!i+1))
vector(1) true_ret=true_return

'WE CONSIDER THE LAST CONDITIONAL SIGMA AS THE FORECASTED ONE AT TIME t+1.
sys01.makegarch(mat, cov, date=!i, name=cov_mat)
matrix cvarpf=@transpose(omega)*cov_mat*omega
matrix cmeanpf=@transpose(omega)*mu

'INSERT THE TRUE REALIZED RETURN
matplace(Var_port_final, true_ret, !i-700,1)

'COMPUTE THE LONG-POSITION VALUE AT RISK (1% AND 5 %)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.01)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,2)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.05)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,3)

''COMPUTE THE SHORT-POSITION VALUE AT RISK (95% AND 99 %)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.95)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,4)
matrix Var_port = cmeanpf + @qnorm(0.99)*@sqrt(cvarpf)
matplace(Var_port_final, Var_port, !i-700,5)

'SAVE THE WORKFILE
wfsave azioni_russe_sol
next

```

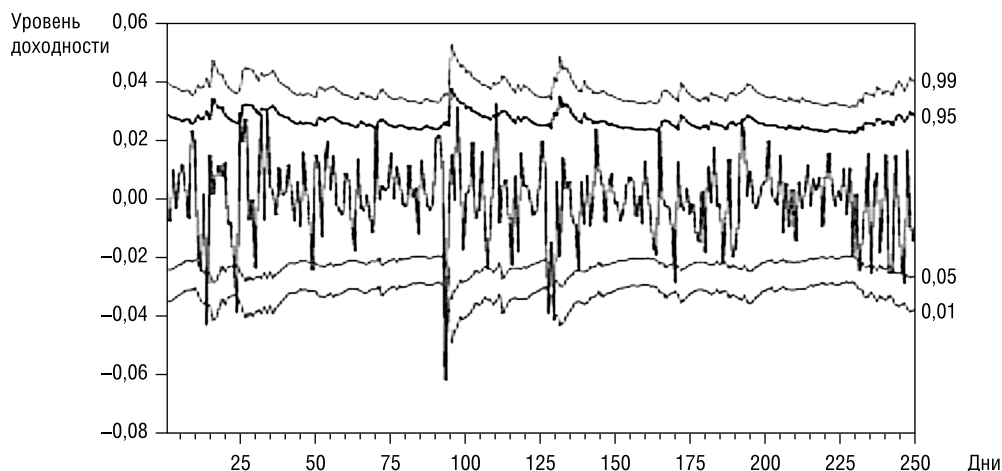


Рис. 10. ГП на уровне 1%, 5%, 95% и 99% (Нормальная диагональная BEKK(1,1,1)-модель, равновзвешенный портфель: Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк)

2.6. Продвинутое методы управления рыночным риском: Copula-GARCH модели¹¹

Несмотря на то, что оценка одномерной ГП достаточно хорошо изучена, многомерным случаем занимались только в немногих недавних работах о прогнозе корреляций между активами. Эмпирические результаты, посвященные этой проблеме, см., например, в работах [Engle, Sheppard (2001)], [Giot, Laurent (2003)], [Bauwens, Laurent (2005)] и [Rosenberg, Schuermann (2006)]. Когда мы используем параметрические методы, оценивание ГП для портфеля активов может оказаться очень затруднительным из-за сложности совместного многомерного моделирования.

Кроме того, с ростом количества активов в портфеле возникают вычислительные трудности¹². По-видимому, вследствие этой сложности на данный момент практики и исследователи уделили большое внимание двум моделям:

- «Постоянная условная корреляция» (ПУК-модель), впервые предложенная в [Bollerslev (1990)];
- «Динамическая условная корреляция» (ДУК-модель), впервые предложенная в [Engle (2002)]¹³.

Можно показать, что модели ПУК и ДУК могут быть представлены как частные случаи более общей *copula*-структуры (см., например, [Patton (2006a)], [Patton (2006b)], [Fantazzini (2008a)] и [Fantazzini (2008b)]).

¹¹ Информацию о Copula-моделях см., например, в [Nelsen (1999)].

¹² Для более подробной информации см. обзор многомерных GARCH моделей в [Bauwens и др. (2006)].

¹³ В англоязычной литературе эти модели называют, соответственно, «CCC-model» («Constant Conditional Correlation model») и «DCC-model» («Dynamic Conditional Correlation model»).

В частности, функция правдоподобия многомерного нормального распределения может быть представлена как произведение нормальной *copula* с корреляционной матрицей $\Sigma = R_t$ и маргинальных нормальных распределений:

$$f^{Normal}(x_1, \dots, x_n) = c^{Normal}(F_1^{Normal}(x_1), \dots, F_n^{Normal}(x_n); R_t) \times \prod_{i=1}^n f_i^{Normal}(x_i), \quad (24)$$

где f_i^{Normal} — плотность маргинального (частного) нормального распределения. Если рассматривается общая модель для условных средних значений и дисперсий, две модели могут быть переформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned} X_t &= E[X_t | F_{t-1}] + D_t \eta_t, \\ \eta_t &\sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Normal}(F_1^{Normal}(\eta_1), \dots, F_n^{Normal}(\eta_n); R_t), \end{aligned} \quad (25)$$

где $D_t = \text{diag}(h_{11,t}^{1/2}, \dots, h_{nn,t}^{1/2})$, $h_{ii,t}$ определяется одномерной GARCH-моделью.

Кроме того, двухшаговая процедура оценки ДУК-модели, описанная в [Engle, Sheppard (2001)], соответствует методу *Inference for Margins (IFM)*, впервые предложенному в статье [Joe, Xu (1996)] для оценки *copula*-функции. Согласно методу IFM, на первом шаге оцениваются параметры маргинальных (частных) распределений, в то время как на втором шаге оцениваются отдельно параметры *copula*-функции. Как и оценки метода максимума правдоподобия, оценки, полученные по методу IFM, обладают свойством асимптотической нормальности (см. [Joe, Xu (1996)] и [Joe (1997)]):

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, V(\theta_0)),$$

где θ_0 — вектор параметров маргинальной функции распределения и *copula*-функции, $V(\theta_0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{D}^{-1})^T$ — так называемая информационная матрица «Godambe», где $\mathbf{D} = \mathbf{E}[\partial g(\theta) / \partial \theta]$, $\mathbf{M} = \mathbf{E}[g(\theta) g(\theta)^T]$ и $g(\theta)$ — некоторая так называемая «score» функция.

Свойство асимптотической нормальности выполняется и для двухшаговой ДУК-оценки (см. [Engle, Sheppard (2001)]).

Поэтому, если мы рассматриваем модель ПУК, это подразумевает оценку n одномерных GARCH моделей любого типа с нормальным распределением на первой стадии. Нормальные функции распределения нормированных остатков $u_{i,t} = \Phi(\eta_{i,t})$ используются как аргументы нормальной *copula*-плотности с постоянной матрицей корреляции $R_t = R$. Однако, так как $\eta_t = (\Phi^{-1}(u_1, t), \dots, \Phi^{-1}(u_n, t))'$, оцениваемая постоянная матрица корреляции равна оцениваемой матрице корреляции стандартизированных остатков в ПУК-модели.

Аналогичным образом, если рассматривается ДУК-модель, нормальная кумулятивная функция распределения и ее обратная функция нейтрализуют друг друга, и логарифмическое правдоподобие *copula*-плотности максимизируется в предположении, что справедлива следующая динамическая структура для корреляционной матрицы R_t :

$$R_t = (\text{diag} Q_t)^{-1/2} Q_t (\text{diag} Q_t)^{-1/2}, \quad (26)$$

где симметричная положительно определенная матрица Q_t размера $n \times n$ равна:

$$Q_t = \left(1 - \sum_{l=1}^L \alpha_l - \sum_{s=1}^S \beta_s \right) \bar{Q} + \sum_{l=1}^L \alpha_l \eta_{t-l} \eta_{t-l}' + \sum_{s=1}^S \beta_s Q_{t-s}, \quad (27)$$

здесь \bar{Q} — безусловная дисперсия случайной величины η_t , $\alpha_l (\geq 0)$ и $\beta_s (\geq 0)$ — скалярные параметры, удовлетворяющие неравенству $\sum_{l=1}^L \alpha_l + \sum_{s=1}^S \beta_s < 1$. Эти условия необходимы для того, чтобы $Q_t > 0$ и $R_t > 0$. Q_t — ковариационная матрица для η_t , так как, по построению, $q_{ii,t}$ не равно 1. Значит, выражением (27) Q_t преобразуется в корреляционную матрицу. Если $\theta_1 = \theta_2 = 0$ и $\bar{q}_{ii} = 1$, то получим ПУК-модель. Для более подробной информации о ДУК-моделировании см. [Engle (2002)].

2.6.1. Некоторые обобщения: маргинальные функции распределения, имеющие асимметричные t -распределения, и динамические *copula*-функции

Как видно из предыдущего раздела, подход с помощью *copula*-функций позволяет нам рассмотреть намного более общие случаи, чем нормальные ПУК- и ДУК-модели.

Два хорошо известных отклонения от нормального распределения — «толстые хвосты» и асимметрия. Например, t -распределение Стьюдента имеет эксцесс больший, чем у стандартного нормального распределения, и это распределение было обобщено так, чтобы получившееся обобщенное распределение имело асимметрию, отличную от асимметрии нормального распределения (см. [Hansen (1994)]). Хотя были предложены и другие обобщения, мы выбрали именно это в связи с его простотой и возможностью использовать в моделировании экономических переменных (см. [Jondeau, Rockinger (2003)], [Patton (2004)], [Patton (2006a)] и [Patton (2006b)]).

Следовательно, многомерная модель, позволяющая маргинальным функциям распределения иметь асимметрию и эксцесс, отличные от асимметрии и эксцесса стандартного нормального распределения, а также иметь нормальную зависимость, может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned} X_t &= E\{X_t | F_{t-1}\} + D_t \eta_t, \\ \eta_t &\sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Normal} (F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); R_t), \end{aligned} \quad (28)$$

где $F_i^{Skewed-t}$ — функция распределения асимметричного t -распределения, а R_t может быть как константой, так и меняться во времени, как это происходит в ПУК- и ДУК-моделях.

Если финансовые активы демонстрируют симметричную хвостовую зависимость, то можно использовать *copula*-функцию Стьюдента

$$\begin{aligned} X_t &= E\{X_t | F_{t-1}\} + D_t \eta_t, \\ \eta_t &\sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Student's t} (F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); R_t, \nu), \end{aligned} \quad (29)$$

где ν — число степеней свободы *copula*-функции Стьюдента. Если же финансовые активы могут быть распределены по m различным группам, то мы можем использовать сгруппированную t -*copula* функцию:

$$\begin{aligned} X_t &= E\{X_t | F_{t-1}\} + D_t \eta_t, \\ \eta_t &\sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Grouped t} (F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); R_t, \nu_1, \dots, \nu_m). \end{aligned} \quad (30)$$

Наконец, если финансовые активы демонстрируют только «нижнюю хвостовую зависимость», можно использовать *copula*-функцию Клейтона,

$$X_t = E\{X_t | F_{t-1}\} + D_t \eta_t, \quad (31)$$

$$\eta_t \sim H(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv C^{Clayton}(F_1^{Skewed-t}(\eta_1), \dots, F_n^{Skewed-t}(\eta_n); \alpha_t),$$

где α — параметр зависимости Клейтона, который может, вообще говоря, меняться во времени.

Подобные подходы предложены в [Patton (2004)], [Jondeau, Rockinger (2006)] и [Granger и др. (2006)]. Однако, в этих работах авторы сосредотачиваются только на двумерных приложениях и не рассчитывают ГП.

2.6.2. Оценка границы потерь с помощью Copula-GARCH моделей

Общий алгоритм для оценки границы потерь уровней 0,25%, 0,5%, 1%, 5%, 95%, 99%, 99,5% и 99,75% на один день вперед для портфеля P , составленного из n активов с инвестиционными позициями, равными M_i , $i = 1, \dots, n$, строится следующим образом.

1. Пусть дано множество значений оцененных параметров для момента времени $t - 1$, смоделируем $j = 100\,000$ сценариев для лог-доходностей каждого актива, $\{y_{1,t}, \dots, y_{n,t}\}$, за период времени $[t - 1, t]$, используя общее мета распределение, с помощью следующей процедуры:

1а). Сначала сгенерируем n -мерную случайную величину $(u_{1,t}, \dots, u_{n,t})$ из спрогнозированной в момент времени t *copula*-функции \hat{C}_t , которая может быть нормальной *copula*-функцией, *t-copula* функцией, *copula*-функцией Клейтона и др.

1б). На втором шаге получим вектор Q_t размера $n \times 1$, стандартизированных лог-доходностей активов $\eta_{i,t}$, используя обратные функции спрогнозированных в момент времени t маргинальных функций распределения, которые могут быть нормальными распределениями, асимметричными t -распределениями и др.:

$$Q_t = (\eta_{1,t}, \dots, \eta_{n,t}) = (F_1^{-1}(u_{1,t}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_n^{-1}(u_{n,t}; \hat{\alpha}_n)).$$

1в). На третьем шаге изменяем масштаб стандартизированных лог-доходностей активов, используя прогнозы для средних и дисперсий, оцененных с помощью AR-GARCH моделей:

$$(y_{1,t}, \dots, y_{n,t}) = (\hat{\mu}_{1,t} + \eta_{1,t} \cdot \sqrt{\hat{h}_{1,t}}, \dots, \hat{\mu}_{n,t} + \eta_{n,t} \cdot \sqrt{\hat{h}_{n,t}}).$$

1г). Наконец, повторяем эту процедуру $j = 100\,000$ раз.

2. Используя эти 100 000 сценариев, в момент времени t портфель P переоценивается, то есть:

$$P_t^j = M_{1,t-1} \cdot \exp(y_{1,t}) + \dots + M_{n,t-1} \cdot \exp(y_{n,t}), \quad j = 1, \dots, 100\,000.$$

3. Для каждого сценария j рассчитывается убыток портфеля:

$$\text{Loss}_j = P_t^j - P_{t-1}, \quad j = 1, \dots, 100\,000.$$

4. Граница потерь уровня α — это $(1 - \alpha) \cdot 100\,000$ порядковый сценарий, где $\alpha = \{0,25\%, 0,5\%, 1\%, 95\%, 5\%, 1\%, 0,5\%, 0,25\%\}$. Например, ГП уровня 0,25% равна 99 750-му порядковому сценарию.

2.7. Эмпирические приложения с использованием статистического пакета R

2.7.1. Оценка COPULA–GARCH модели для доходностей

Рассмотрим ежедневные показатели доходностей индексов SP500 и DAX за период с 1994 по 2000 год (данные файла sp_dax.txt). Процедура оценки Copula–GARCH модели в статистическом пакете R:

```
# Read the data
dat <- read.table("C:/sp_dax.txt", header = TRUE)

# Generate the returns in %
y1=100*diff(log(dat[,1]))
y2=100*diff(log(dat[,2]))

# Estimate the GARCH models with a Student's t distribution
fit1 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y1)
fit2 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y2)

#Have a look at what there is inside the output of the GARCH estimation
#(which is an S4 object, see p.9 of the manual by Grant Farnsworth
fit1@fit

#Get the standardized residuals
sp_res=fit1@fit$series$z
dax_res=fit2@fit$series$z

#Get the Cumulative Distribution Functions:

#Remember that the standardized residuals are (0,1), while when computing

#the cdf of a central standard Student's t, the variance is nu/(nu-2).
cdf_sp= pt(sqrt(fit1@fit$coef[5]/(fit1@fit$coef[5]-2))*sp_res,fit1@fit$coef[5])
cdf_dax=pt(sqrt(fit2@fit$coef[5]/(fit2@fit$coef[5]-2))*dax_res, fit2@fit$coef[5])

#Estimate a bivariate T copula
ellipticalCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "t")

#Estimate a bivariate Gumbel
archmCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax,type="4")
```

Для *t*-copula функции Стьюдента должно получиться:

```
$par [1] 0.2781346 10.2533838
$objective [1] -0.06653569
...
```

а для copula-функции Гумбеля — такие результаты:

```
$par [1] 1.200167
$objective [1] -0.05549976
...
```

Вы можете попробовать использовать другие двумерные copula-функции, включенные в пакет *fcopulae*, начиная с эллиптических copula-функций и кончая copula-функциями экстремальных значений.

2.7.2. Оценка границы потерь с помощью Copula–GARCH модели

Рассмотрим те же данные, как в предыдущем разделе, и рассчитаем границу потерь уровня 1% для равновзвешенного портфеля. Для описания совместного распределения доходностей мы воспользуемся *T*-copula функцией с маргинальными (частными) функциями распределения, имеющими *t*-распределение. Программа в R выглядит следующим образом:

```
#I load the packages needed for my following work
library(fGarch)
library(fCopulae)

#Read the data dat <-
read.table("C:/Lezioni/Moscow_master_2_anno/COPULA/sp_dax.txt", header = TRUE)

#Generate the returns in % REMARK: If you don't multiply for 100, the resulting

#cdf's are not precisely estimated and the elliptical copula cannot be estimated
y1_all=100*diff(log(dat[,1]))
y2_all=100*diff(log(dat[,2]))

#Initalize the vectors which will contain the realized returns

# and the VaRs estimates
var_final=
true_ret=
for (i in 1000:1249)
y1=y1_all[1:i]
y2=y2_all[1:i]

#Estimate the GARCH models
fit1 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y1, trace=FALSE)
fit2 = garchFit( garch(1, 1), cond.dist = "dstd", data=y2, trace=FALSE)

#1-step ahead Forecast
fore_1=predict(fit1, n.ahead = 1)
fore_2=predict(fit2, n.ahead = 1)

#Example mean forecast (DAX return)
fore_2[,1]

#Example variance forecast (DAX variance)
fore_2[,3]

#Have a look at what there is inside the output of the GARCH estimation

#(which is an S4 object, see p. 9 of the manual by Grant Farnsworth fit1@fit
```



```
#Get the standardized residuals
sp_res=fit1@fit z
dax_res=fit2@fit z

#Get the Cumulative Distribution Functions:

#Remember that the standardized residuals are (0,1), while when computing the cdf
#of a central standard Student's t, the variance is nu/(nu-2).

#REMARK: IF you add ARMA terms, then coef[5] is no more correct!
cdf_sp= pt(sqrt(fit1fit$coef[5]/(fit1fit$coef[5]-2))*sp_res, fit1fit$coef[5])
cdf_dax=pt(sqrt(fit2fit$coef[5]/(fit2fit$coef[5]-2))*dax_res, fit2fit$coef[5])

#Estimate a bivariate T copula
t_est=ellipticalCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "t") t_est

#Estimate a bivariate Gumbel
a_est=archmCopulaFit(cdf_sp,cdf_dax, type = "4") a_est

#Simulate the estimated elliptical copula
e_sim=ellipticalCopulaSim(10000, rho = t_est par[2], type = c("t"))

#REMARK: we use only 10000 simulations for the elliptical and 1000 for the archimedean
# since the R procedures are very slow compared to Gauss and Matlab. However,
# remember that to have a good approximation of the quantile you need at 100.000
# MC simulations!

#Simulate the estimated archimedean copula

a_sim=archmCopulaSim(1000, alpha = a_est$par[1], type = "4")

#Simulate the standardized residuals [F_1-1(u_1),F_2-1(u_2)]
sim_std1=sqrt(((fit1fit$coef[5]-2)/fit1fit$coef[5])*qt(e_sim[,1],fit1fit$coef[5]))
sim_std2=sqrt(((fit2fit$coef[5]-2)/fit2fit$coef[5])*qt(e_sim[,2],fit2fit$coef[5]))

#Simulated returns
sim_ret1=fore_1[,1]+sqrt(fore_1[,3])*sim_std1
sim_ret2=fore_2[,1]+sqrt(fore_2[,3])*sim_std2

#Portfolio simulated returns
sim_port=sim_ret1+sim_ret2

#Sort the simulated returns
sort_sim=sort(sim_port)

#Value at Risk at 1% quantile = [0.01*(ROWS OF THE VECTOR)] sorted

#returns
var=sort_sim[0.01*NROW(sort_sim)]
```

```
#I save the estimated VaR and the realized return
var_final=rbind(var_final,var)
ret=y1_all[i+1]+y2_all[i+1]
true_ret=rbind(true_ret,ret)

#Create the hit series for the Var at 1% level and compute the sum

#for the basel test
hit01=1*(true_ret<var_final)
base1_test=sum(hit01)

#plot the true returns and the VaR
plot(true_ret,type="l",col=2,xlab="Date",ylab="True realized return and VaR at 1% level",
main="VaR at 1% level of a bivariate portfolio - T marg./Norm c.")
lines(var_final,col=3)
```

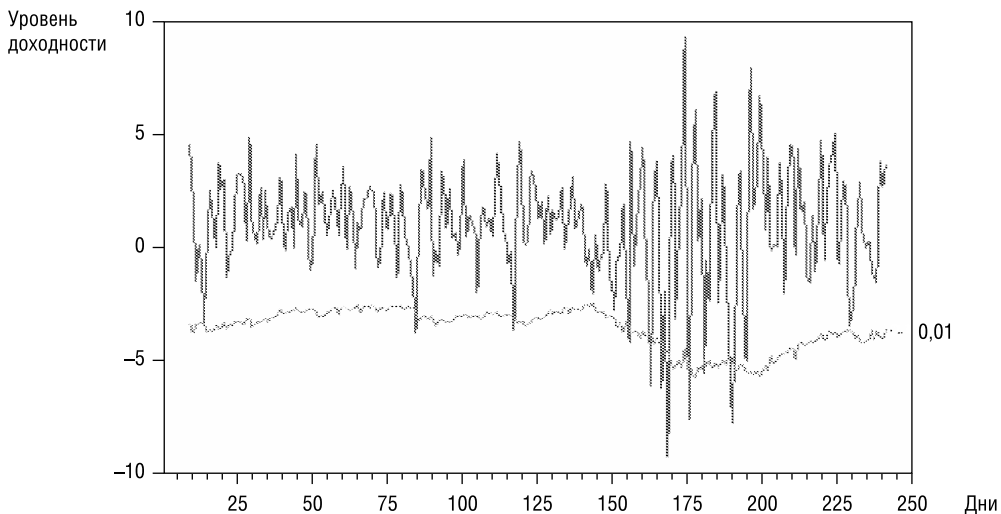


Рис. 11. ГП на уровне 1% (Copula–GARCH модель, равновзвешенный портфель: Газпром, Лукойл, РБК, Сбербанк)

2.8. Тестирование ГП на исторических данных

Определим последовательность «успехов» (I_t) :

$$I_{t+1} = 1, \text{ если } Y_{t+1} < -\Gamma\alpha(t;1),$$

$$I_{t+1} = 0, \text{ если } Y_{t+1} \geq -\Gamma\alpha(t;1).$$

Если используется идеальная модель для получения оценки границы потерь ГП, то превышения $-\Gamma\alpha(t;1)$ следует ожидать в доле $1-\alpha$ случаев ежедневно. При справедливости нулевой гипотезы о правильной спецификации последовательность «успехов» — последовательность независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с вероятностью «успеха» α :

$$H_0: I_{t+1} \sim \text{Bernoulli}(\alpha),$$

$$f(I_t, \alpha) = (1-\alpha)^{1-I_{t+1}} \alpha^{I_{t+1}}.$$

2.8.1. Тестирование на безусловный охват

Пусть мы хотим протестировать, отличается ли от α статистически значимо доля наблюдений π , меньших $-\Pi_\alpha$, некоторой модели риска. Функция правдоподобия для последовательности Бернулли равна:

$$L(\pi) = \prod_t (1-\pi)^{1-I_{t+1}} \pi^{I_{t+1}} = (1-\pi)^{T_0} \pi^{T_1},$$

где T_0 и T_1 — число нулей и единиц в нашей выборке (а $T = T_0 + T_1$). Тогда оценка максимума правдоподобия для π равна

$$\hat{\pi} = \frac{T_1}{T_0 + T_1}.$$

Интересующая нас гипотеза о том, что истинная доля потерь, больших границы потерь, равна α , может быть проверена (в предположении независимости I_1, I_2, \dots) с помощью метода отношения правдоподобия

$$LR_{uc} = -2 \ln[L(\alpha)/L(\hat{\pi})] = -2 \ln[(1-\alpha)^{T_0} \alpha^{T_1} / (1-T_1/T)^{T_0} (T_1/T)^{T_1}] \sim \chi^2(1).$$

В соответствии с теорией, статистика LR_{uc} должна подчиняться $\chi^2(1)$ распределению при больших выборках. При малых T распределение критических значений статистики LR_{uc} может быть получено с помощью статистического моделирования.

2.8.2. Тест на независимость

Возможны ситуации, когда модель проходит тест на безусловный охват, но при этом все наблюдения t , для которых $I_t = 1$, сконцентрированы в малой окрестности некоторого момента времени. В этом случае, возможно, нарушена независимость наблюдений, и необходим тест, с помощью которого можно было бы проверить нашу гипотезу и при наличии таких сгущений t . С этой целью предположим, что последовательность попаданий зависима по времени и что она может быть описана как марковская последовательность первого порядка с матрицей вероятностей переходов

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1-\pi_{01} & \pi_{01} \\ 1-\pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix},$$

где π_{01} — вероятность того, что завтра $I_{t+1} = 1$, при условии, что сегодня $I_t = 0$. Вероятность события $\{I_t = 0, I_{t+1} = 0\}$ равна $1-\pi_{01}$, а вероятность события $\{I_t = 0, I_{t+1} = 1\}$ равна $1-\pi_{11}$.

Для выборки T наблюдений из марковского процесса первого порядка функция правдоподобия равна

$$L(\Pi_1) = (1-\pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1-\pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}},$$

где T_{ij} — число наблюдений, для которых $I_t = i$ и $I_{t+1} = j$. Беря первую производную по π_{01}, π_{11} и приравнявая эти производные нулю, получим оценки максимума правдоподобия:

$$\hat{\pi}_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}},$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}}.$$

Используя тот факт, что вероятности должны давать в сумме единицу, мы получим

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{00} &= 1 - \hat{\pi}_{01}, \\ \hat{\pi}_{10} &= 1 - \hat{\pi}_{11}.\end{aligned}$$

Допущение о зависимости «последовательности попаданий» соответствует допущению, что π_{01} должно отличаться от π_{11} : в нашем случае типичной будет ситуация, при которой $\pi_{11} > \pi_{01}$.

Если, с другой стороны, попадания независимы, то мы имеем $\pi_{01} = \pi_{11} = \pi$. При условии независимости, матрица перехода равна

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \\ 1 - \hat{\pi} & \hat{\pi} \end{pmatrix}.$$

Мы можем тестировать независимость, используя тест отношения правдоподобия:

$$LR_{ind} = -2 \ln[L(\hat{\Pi})/L(\hat{\Pi}_1)] \sim \chi^2(1).$$

В случае, если оказалось, что $T_{11} = 0$, функция правдоподобия примет вид

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}}.$$

2.8.3. Тестирование на условный охват

Наконец, если нам необходимо протестировать одновременно гипотезу о том, что I_1, I_2, \dots образуют последовательность независимых случайных величин и что доля нулей этой последовательности согласуется с предположением нашей модели (т. е. равна $1 - \alpha$), то можно воспользоваться тестом «на условный охват»:

$$LR_{cc} = -2 \ln[L(\alpha)/L(\hat{\Pi}_1)] \sim \chi^2(2),$$

который соответствует тестированию гипотезы $\pi_{01} = \pi_{11} = \alpha$. Необходимо помнить, что

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}.$$

2.8.4. Базельский тест для моделей ГП

Этот тест основан на числе потерь, больших, чем оценка 1-дневной границы потерь 1%-го уровня. Длина периода тестирования равна 250 дням.

Масштабный множитель, на который должна быть умножена оценка $\Gamma\Pi_{0,01}(t, 1)$ при расчете требуемого банку объема капитала, определяется нормативно в зависимости от результатов теста (см. табл. 1). Отметим, что это односторонний тест, направленный на то, чтобы определять уровни очень малого риска.

Базельский тест: количество случаев, в которых потери превышали $\Gamma\Pi_{0,01}(t, 1)$ (рассчитанные по 250 наблюдениям).

Уровень рыночного рискованного капитала, который банк должен иметь в момент t , равен максимуму из $\Gamma\Pi_{0,01}(t-1, 1)$ и среднего $\Gamma\Pi_{0,01}(t, 1)$ за шестьдесят последних периодов, умноженного на так называемый масштабный параметр SF , а именно:

$$MRC = \max\left(\Gamma\Pi_{0,01}(1, t-1), SF \cdot \frac{1}{60} \cdot \sum_{t=1}^{60} \Gamma\Pi_{0,01}(1, t-1-i)\right).$$

Таблица для определения масштабного множителя

Зоны	Число наблюдений, меньших $ГП_{0,01}(t,1)$	Масштабный множитель
Зеленая зона	0-4	3
Желтая зона	5	3,4
Желтая зона	6	3,5
Желтая зона	7	3,65
Желтая зона	8	3,75
Желтая зона	9	3,85
Красная зона	≥ 10	4

Список литературы

- Acerbi C. Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion // *Journal of Banking and Finance*. 2002. № 26. P. 1505–1518.
- Acerbi C. Coherent Representations of Subjective Risk-Aversion / in G. Szego (Ed). Risk Measures for the 21st Century. Wiley, New York, 2004.
- Acerbi C., Tasche D. On the Coherence of Expected Shortfall // *Journal of Banking and Finance*. 2002. № 26(7). P. 1487–1503.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J. M., Heath D. Coherent Measures of Risk // *Mathematical Finance*. 1999. № 9. P. 203–228.
- Baltagi B. H., Bresson G., Pirotte A. Panel Unit Root Tests and Spatial Dependence // *Journal of Applied Econometrics*. 2007. № 22. P. 339–360.
- Banerjee A. Panel Data Unit Roots and Cointegration: An Overview // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 1999. Vol. 61(0).
- Banerjee A., Marcellino M., Osbat C. Some Cautions on the Use of Panel Methods for Integrated Series of Macroeconomic Data // *Econometrics Journal*. 2004. № 7. P. 322–340.
- Banerjee A., Marcellino M., Osbat C. Testing for PPP: Should we Use Panel Methods? // *Empirical Economics*. 2005. № 30. P. 77–91.
- Bauwens L., Laurent S. A New Class of Multivariate Skew Densities, with Application to GARCH Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2005. № 23(3). P. 346–354.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. Multivariate GARCH Models: a Survey // *Journal of Applied Econometrics*. 2006. № 21(1). P. 79–109.
- Bollerslev T. Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Model // *The Review of Economics and Statistics*. 1990. № 72(3). P. 498–505.
- Breitung J. A Parametric Approach to the Estimation of Cointegration Vectors in Panel Data // *Econometric Reviews*. 2005. P. 151–174.
- Breitung J., Pesaran M. H. Unit Roots and Cointegration in Panels / Forthcoming in Matyas L., Sevestre P. The Econometrics of Panel Data (Third Edition). Kluwer Academic Publishers, 2007.
- Choi I. Unit Root Tests for Panel Data // *Journal of International Money and Finance*. 2001. № 20. P. 249–272.
- Christoffersen P. Elements Of Financial Risk Management, Academic Press. 2003.
- Engle R. F., Sheppard K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH // *NBER Working Papers*. 2001. № 8554.

- Engle R. F. Dynamic Conditional Correlation — a Simple Class of Multivariate GARCH Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2002. № 20. P. 339–350.
- Fantazzini D. Dynamic Copula Modelling for Value at Risk, *Frontiers in Finance and Economics*. 2008a. Forthcoming.
- Fantazzini D. The Effects of Misspecified Marginals and Copulas on Computing the Value at Risk: A Monte Carlo Study, *Computational Statistics and Data Analysis*. 2008b. Forthcoming.
- Gengenbach C., Palm F. C., Urbain J. P. Panel Unit Root Tests in the Presence of Cross-Sectional Dependencies: Comparison and Implications for Modelling. Universiteit Maastricht, 2006. Unpublished.
- Giot P., Laurent S. Value-at-Risk for Long and Short Positions // *Journal of Applied Econometrics*. 2003. № 18. P. 641–664.
- Granger C., Patton A., Terasvirta T. Common Factors in Conditional Distributions for Bivariate Time Series // *Journal of Econometrics*. 2006. № 132. P. 43–57.
- Groe J. J., Kleibergen F. Likelihood-Based Cointegration Analysis in Panels of Vector Error-Correction Models // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. № 21. P. 295–318.
- Gutierrez L. Panel Unit Roots Tests for Cross-Sectionally Correlated Panels: A Monte Carlo Comparison // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 2006. № 68. P. 519–540.
- Hadri K. Testing for Stationarity in Heterogeneous Panel Data // *Econometric Journal*. 2000. № 3. P. 148–161.
- Hansen B. Autoregressive Conditional Density Estimation // *International Economic Review*. 1994. № 35(3). P. 705–730.
- Hlouskova J., Wagner M. The Performance of Panel Unit Root and Stationarity Tests: Results from a Large Scale Simulation Study // *Econometric Reviews*. 2006. № 25. P. 85–116.
- Hlouskova J., Wagner M. The Performance of Panel Cointegration Methods: Results From a Large Scale Simulation Study // *Econometric Reviews*. Forthcoming, 2007.
- Im K. S., Pesaran M. H., Shin Y. Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels // *Journal of Econometrics*. 2003. № 115. P. 53–74.
- Kao C. Spurious Regression and Residual-Based Tests for Cointegration in Panel Data // *Journal of Econometrics*. 1999. № 90. P. 1–44.
- Kao C., Chiang M. H. On the Estimation and Inference of a Cointegrated Regression in Panel Data // *Advances in Econometrics*. 2000. № 15. P. 179–222.
- Joe H., Xu J. The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report no. 166. 1996.
- Joe H. Multivariate Models and Dependence Concepts. London: Chapman Hall, 1997.
- Jondeau E., Rockinger M. Conditional Volatility, Skewness, and Kurtosis: Existence, Persistence, and Comovements // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2003. № 27. P. 1699–1737.
- Jondeau E., Rockinger M. The Copula–GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock-Market Application // *Journal of International Money and Finance*. 2006. № 25. P. 827–853.
- Jorion P. Financial Risk Manager Handbook. 4th edition. Wiley, 2007.
- Larsson R., Lyhagen J., Lothgren M. Likelihood-Based Cointegration Tests in Heterogeneous Panels // *Econometrics Journal*. 2001. № 4. P. 109–142.
- Levin A., Lin C. F., Chu C. Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties // *Journal of Econometrics*. 2002. № 108. P. 124.
- Maddala G. S., Wu S. A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and A New Simple Test // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 1999. № 61. P. 631–652.

Mark N. C., Sul D. Cointegration Vector Estimation by Panel DOLS and Long-run Money Demand // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 2003. № 65. P. 655–680.

Nelsen R. B. An Introduction to Copulas, Springer Series in Statistics. 1999.

O'Connell G. J. The overvaluation of purchasing power parity // *Journal of International Economics*. 1998. № 44(1). P. 1–19.

Patton A. On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation // *Journal of Financial Econometrics*. 2004. № 2(1). P. 130–168.

Patton A. Estimation of Copula Models for Time Series of Possibly Different Lengths // *Journal of Applied Econometrics*. 2006a. № 21. P. 147–173.

Patton A. Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence // *International Economic Review*. 2006b. № 47(2). P. 527–556.

Pedroni P. Critical Values for Cointegration Tests in Heterogeneous Panels with Multiple Regressors // *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 1999. № 61. P. 653–670.

Pedroni P. Panel Cointegration: Asymptotic and Finite Sample Properties of Pooled Time Series Tests With an Application to the PPP Hypothesis // *Econometric Theory*. 2004. № 20. P. 97–625.

Pesaran M. H. A Simple Panel Unit Root Test in the Presence of Cross Section Dependence // *Journal of Applied Econometrics*. 2007. № 22. P. 265–312.

Pesaran M. H., Shin Y., Smith R. P. Pooled Mean Group Estimation of Dynamic Heterogeneous Panels // *Journal of the American Statistical Association*. 1999. № 94. P. 621–624.

Phillips P. C. B., Moon H. R. Linear Regression Limit Theory for Nonstationary Panel Data // *Econometrica*. 1999. № 67. P. 1057–1111.

Rosenberg J. V., Schuermann T. A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks // *Journal of Financial Economics*. 2006. № 79. P. 569–614.

White H. Estimation, Inference and Specification Analysis. Cambridge University Press, 1994.